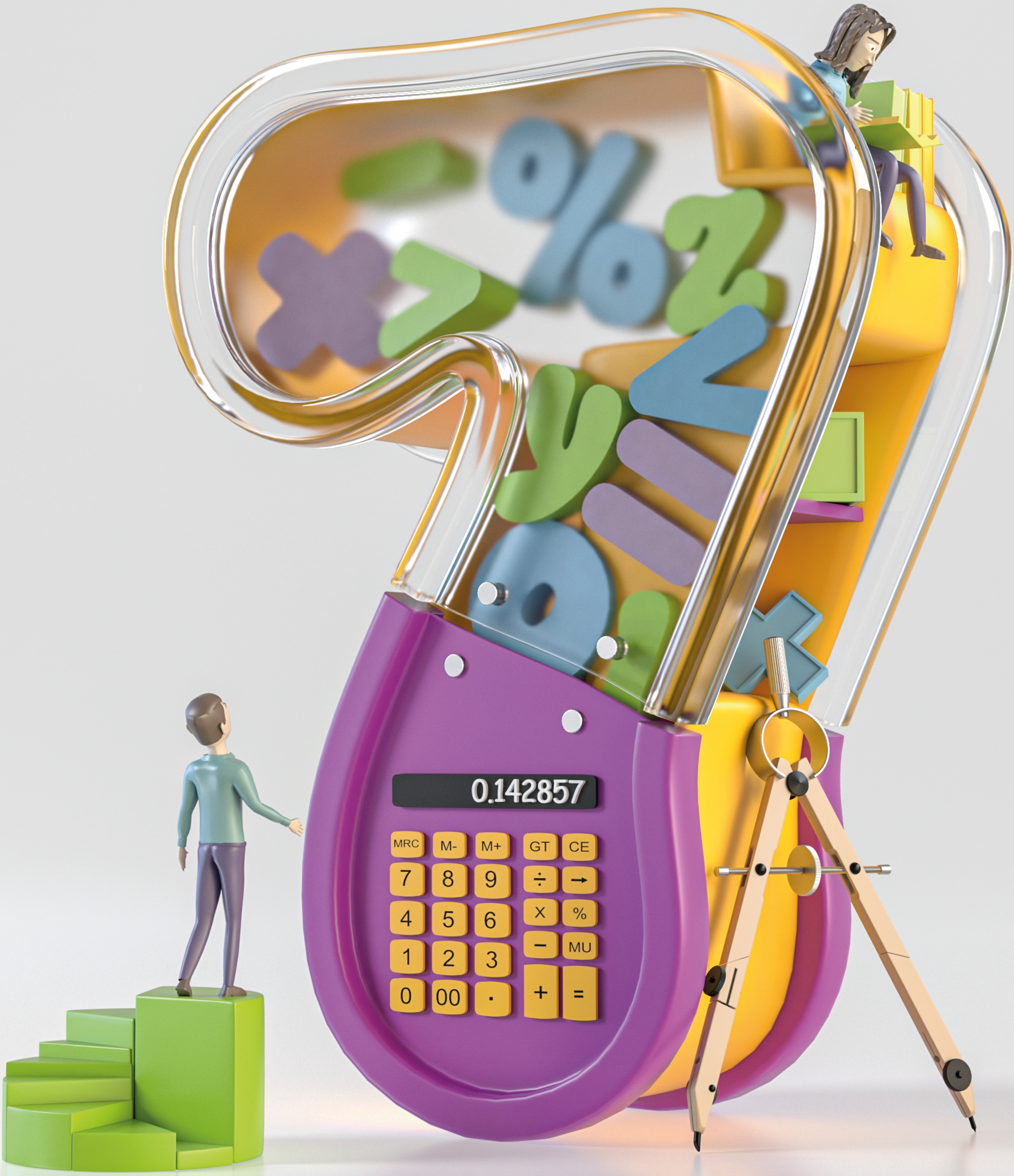
МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi Üzeyir Hacıbəylinin,
sözləri Əhməd Cavadındır.

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!

Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

СЕВДА ИСМАЙЫЛОВА
SAHİB ABDURAHİMOV

УЧЕБНИК

по предмету

МАТЕМАТИКА

для 7-го классов общеобразовательных заведений

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi info@eastwest.az və derslik@edu.gov.az elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur. Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

ŞƏRQ-QƏRB

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. СТАТИСТИКА. ВЕРОЯТНОСТЬ

РАЗДЕЛ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

РАЗДЕЛ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

РАЗДЕЛ 4. ОДНОЧЛЕНЫ. МНОГОЧЛЕНЫ

РАЗДЕЛ 5. ТРЕУГОЛЬНИКИ

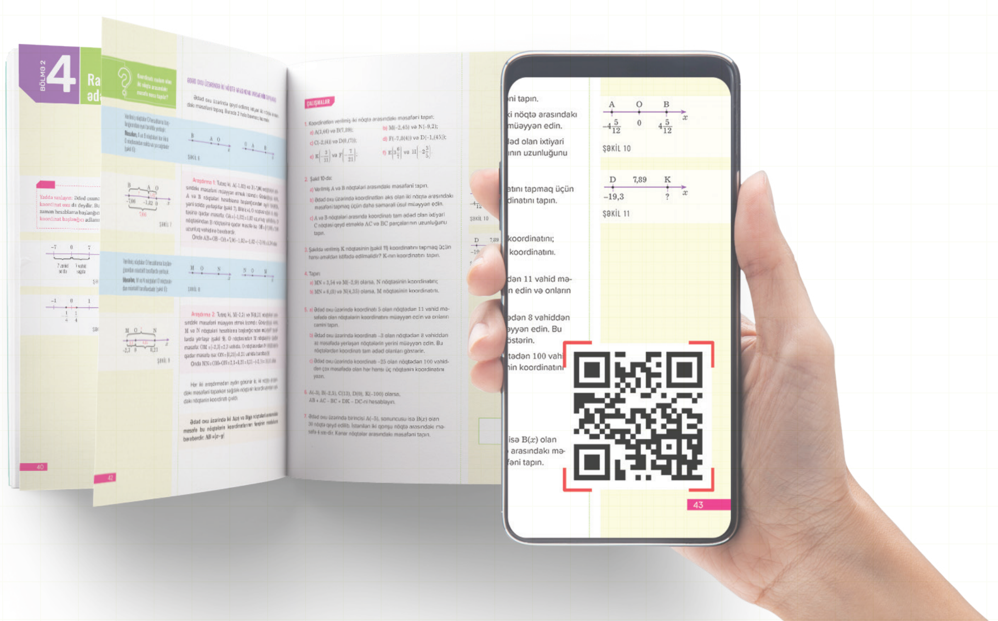
РАЗДЕЛ 6. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

РАЗДЕЛ 7. ФУНКЦИЯ

РАЗДЕЛ 8. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАЗДЕЛ 9. КОНГРУЭНТНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

РАЗДЕЛ 10. СИТУАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ



СТАТИСТИКА ВЕРОЯТНОСТЬ

РАЗДЕЛ 1

Математическая статистика – это один из разделов математики. Она занимается переработкой статистически данных и охватывает математические методы, применяемые для получения научных и практических результатов. Теория вероятности составляет основу математической статистики.

Ещё в древности по результатом длительных наблюдений за ранним наступлением жары, ранним или поздним похолоданиями, основываясь на разные «признаки» люди высказывали своё мнение природных событиях: «За последние 100 (50 или 10) лет это происходит впервые». Этим делались попытки количественно оценить случайность, то есть попытки применить понятие частоты явления.

В XI–XVI веках сформировалась идея охарактеризовать цифрами, измерить уровень случайности. Таким образом, стало применяться понятие «вероятность случайного события».

Для чего это нужно?

Чтобы изучить происходящие явления в окружающей среде сначала осуществляется сбор информации об этом событии. → Собранную информацию представить разными способами. → Производится вычисление вероятности наступления событий → На основе собранной и представленной информации даются прогнозы

РАЗДЕЛ 1

1 Сбор информации

Знаете ли вы?

Для наблюдения за погодой и определения температуры воздуха применяют воздушные шары.С помощью воздушных шаров в верхние слои атмосферы поднимают радары, компьютеры, зонды а также необходимую аппаратуру для определения атмосферного давления, скорости и направления ветра, количества атмосферных осадков

Исследование событий связано со сбором информации об этих событиях. Например, каждый день вы думаете о том, какова будет погода. Но для чего нужна информация о погоде? Как может влиять погода на экономику и благополучие страны?

Получение информации о каком-либо событии осуществляется разными способами: *наблюдение*, *опыт*, *опрос* и т.д.

НАБЛЮДЕНИЕ: Врач каждые 2 часа в течение 8-и часов измерял температуру больного и получил следующие результаты: 39,5°; 39°; 38°; 37°. Он наблюдает последовательное снижение и нормализацию температуры больного.

ОПЫТ: Чтобы определить урожайность различных сортов пшеницы селекционер высевает их на 3-х различных участках. По числу проросших семян он определяет наиболее продуктивный сорт пшеницы.

ОПРОС: Для изучения некоторого события подготавливается опрос-анкета вопросов, раскрывающих суть этого события. Уточняется круг лиц среди которых будет проводиться опрос. Например, проводится опрос среди учеников о том, по каким видам спорта следовало бы создать секции в школе. Опрос можно организовать следующим образом:

1. *По каким видам спорта открытие в школе секций хотели бы вы?*
2. *Какова необходимость в создании этих секций?*
3. *Имеется ли инвентарь для этих видов спорта?*
4. *В какое по вашему мнению время следует организовать эти секции?*

Накопленная различными способами информация является первичной, применяемой в дальнейшем.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Число зрителей фильма «Аршин мал алан» на страницах интернета в конце недели было представлено по возрастным категориям следующим образом:

Суббота: 1105 пожилые, 756 среднего возраста, 135 подростков.

Воскресенье: 984 пожилые, 436 среднего возраста, 298 подростков. Подумайте, как ответить на следующие вопросы:

а) Представителям какой возрастной категории этот фильм нравится больше

b) Определите приблизительно каков процент числа зрителей подросткового возраста от числа остальных зрителей

2. По представленной на графике рисунка 1 информации ответьте на вопросы:

a) На сколько количество машин, проданных в мае месяце, больше количества машин, проданных в апреле?

b) В каком месяце было продано меньше всего машин?

c) Определите сколько машин было продана за все 5 месяцев.

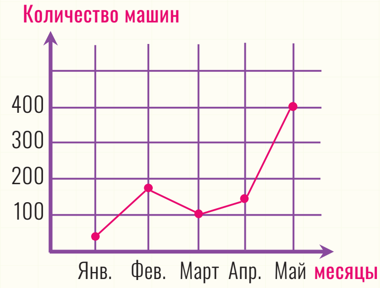


РИСУНОК 1

3. Чтобы выяснить предпочтения подростков, руководство спортивного центра, провело опрос среди 35 из них.

шахматы	рисование	футбол	танцы	плавание	плавание	шахматы
драматический кружок	танцы	баскетбол	плавание	шахматы	voleybol	рисование
шахматы	плавание	футбол	танцы	волейбол	плавание	плавание
рисование	баскетбол	футбол	плавание	футбол	футбол	баскетбол
баскетбол	шахматы	рисование	futbol	плавание	танцы	драматический кружок

Определите нижеуказанное по представленной информации:

a) Сколько подростков заняты каждым видом деятельности?

b) Руководство центра из-за ограниченных финансовых средств решило закрыть некоторые секции. Как по вашему какие секции будут закрыты? Объясните.

4. Соберите информацию о погоде в регионах Азербайджана в течении последовательных 7 дней.

a) Определите какая газета или интернет-сайт послужит источником информации.

b) По источнику информации запишите данные о погоде по 10-и городам и районам.

c) Определите наибольшую и наименьшую температуру за исследуемые 7 дней.

d) Сможете ли вы сказать, какова будет погода на 8-й день в каждом из этих регионов.

5. Информация представлена на рисунке 2.

a) Количество средне годовых атмосферных осадков в горах Зангезура на 10% меньше количества осадков Кура–Аразской низменности. Определите количество годовых осадков в горах Зангезура.

b) Каково среднегодовое количество осадков в мм. по Азербайджану?

c) Каково среднегодовое количество осадков в мм. на Гавайских островах и в Атакаме.

d) Какую часть составляет годовое количество осадков в Шуше от количества осадков в предгорьях Талышских гор?

Территория	Количество годовых осадков
Абшеронский полуостров	300 мм
Нахичеванская республика	900 мм
Предгорья Талышских гор	1500 мм
Кура–Аразской низменности	400 мм
Зангезурские горы	? мм
Шуша	800 мм
Гавайские острова	12000 мм
Пустыня Атакама в Южной Америке	5 мм

РИСУНОК 2

РАЗДЕЛ 1

2 Представление информации

Важно собранную информацию в последующем представить в нужном для ее применения виде. С этой целые применяют различные, более удобные способы представления информации.

I. ТАБЛИЧНЫЙ СПОСОБ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представление информации в табличном виде считается более удобным. Считывать информацию из таблицы относительно легче, чем получать её из текстового материала. По данным о количестве наступления событий обычно составляют таблицу частот.

Таблица частот – это представление в виде таблицы числа повторений события.

ПРИМЕР: По данным таблицы составьте таблицу частот числа членов семей.

Число членов семей, проживающих в квартирах по адресу ул. Полада Гашимова, дом 16	6	3	3	2	2	5	6	5	5	4	3	1
	4	4	3	5	4	2	1	4	5	6	6	4
	3	2	3	3	4	5	3	6	6	2	1	1

По таблице частот определите:

a) Сколько в доме квартир, в которых проживает более чем 3 члена семьи?

b) Какую часть составляет число квартир с одним жителем от числа квартир с пятью жителями?

РЕШЕНИЕ: Как видим, информация, данная в таблице, запутанная. Эту информацию удобно представить в виде таблицы частот на рисунке 3.

a) Количество квартир с числом жителей больше 3 равно 7+6+6=19 квартир.

b) Количество квартир с одним жителем 4, а количество квартир с числом жителей 5 равно 6. Тогда $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Число членов семьи	Число квартир
1	4
2	5
3	8
4	7
5	6
6	6

РИСУНОК 3

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Коммунальная служба. Запишите в таблицу частот информацию (рисунок 4) о количества звонков, связанных с коммунальными услугами в городе А в июне месяце. Число звонков разбейте на интервалы по 10 в каждом. Исследуйте таблицу числа ежедневных звонков и ответьте на следующие вопросы:

Число звонков с обращениями по каждодневным коммунальным услугам за июнь месяц	32	7	11	40	13
	21	44	51	37	48
	29	54	28	38	20
	3	5	29	36	0
	35	35	8	45	43
	10	24	6	56	15

a) Сколько дней состоялось больше 20 звонков?

b) Сколько процентов составляет число дней с количеством звонков менее 40 к общему числу дней?

c) Во сколько раз число дней с более чем 50 звонков меньше числа дней с менее чем 10 звонков?

Коммунальные услуги	
0-9	?
10-19	?
20-29	?
30-39	?
...	...

РИСУНОК 4

2. Издательство. По нижеприведённой информации о периодичности журнала ответьте на вопросы:

a) Сколько процентов составляет число журналов с тиражом более чем 5000 от числа журналов с тиражом менее 5000 экземпляров?

b) Сколько процентов составляет число журналов с тиражом от 4000 до 8000 экземпляров от общего числа журналов?

c) Можно ли представить эту информацию интервальным способом? Если вы задумаете представить эту информацию интервальным способом, то какие интервалы вы бы выбрали?

Годовой тираж печатающихся в Азербайджане журналов

Название журнала	Тираж	Название журнала	Тираж
“Azərbaycan”	7560	“Azərbaycanın vergi jurnalı”	3000
“Azərbaycan qadını”	5330	“Ailə və sağlamlıq”	2500
“Azerbaijan International”	6700	“Göyərçin”	3500
“Dədə Qorqud”	3500	“Bioqrafiya”	3000
“Dünya ədəbiyyatı”	4200	“Kirpi”	5100

3. Физическая культура: Используйте информацию о спортивном центре из таблицы на рисунке 5.

a) Создайте таблицу частот количества часов.

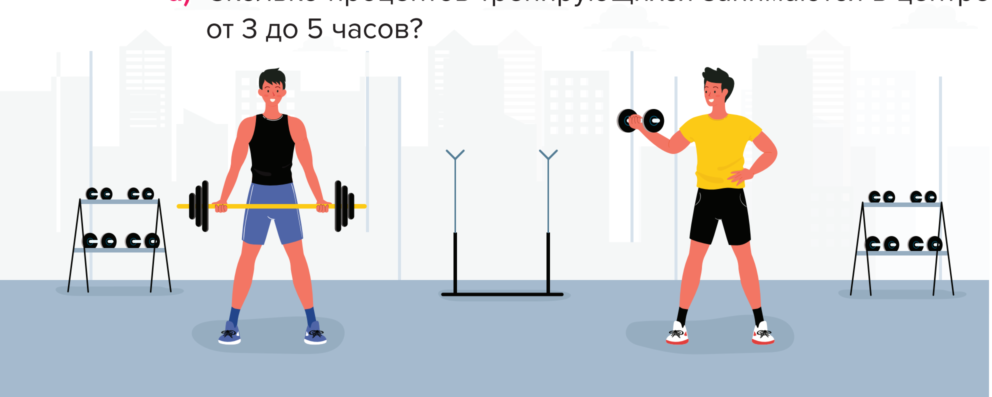
b) Сколько процентов числа членов центра тратят на тренировки не менее 5 ч?

c) На сколько процентов число членов центра, потративших на тренировки не более 7 часов, меньше числа остальных членов секции?

d) Сколько процентов тренирующихся занимаются в центре от 3 до 5 часов?

Количество часов за неделю, потраченных на тренировки 20 членов спортивного оздоровительного центра				
4	0	5	7	3
7	2	6	1	6
5	3	0	2	2
5	3	5	5	7

РИСУНОК 5




Штангенциркуль

4. Измерения: Несколько школьников измеряли штангенциркулем толщину стальной пластинки с точностью 0,001. Полученные результаты измерений в дюймах занесены в таблицу: (1 дюйм $\approx 2{,}54$ см)

0,367	0,369	0,372	0,373	0,365	0,370	0,371
0,368	0,366	0,371	0,37	0,366	0,376	0,366
0,374	0,369	0,375	0,369	0,375	0,373	0,371
0,370	0,364	0,367	0,372	0,372	0,368	0,374

a) Используя калькулятор переведите результаты измерений в сантиметры.

b) Информацию представьте в виде таблицы частот.

c) Для каждого числа назовите числа, большие и меньшие его.

d) Сколько процентов составляет количество чисел между 0,365 и 0,374 от общего количества?

5. По информации в таблице о беспилотных летательных аппаратах (дронах) ответьте на следующие вопросы:

БПЛА	Bayraktar Akıncı	Orbiter 2	Aerostar	Hermes 450
Размах крыльев	20,6 м	3 м	7,5 м	10,50 м
Собственная длина	12,5 м	1 м	4,5 м	6,10 м
Высота	4,1 м	1,3 м	1,3 м	1,80 м
Максимальный вес	5500 кг	8,5 кг	215 кг	450 кг

a) Какова разница в размахе крыльев “Bayraktar Akıncı” и “Hermes 450”?

b) Найдите отношение размаха крыльев к собственной длине “Bayraktar Akıncı” и округлите полученный результат до целых десятых.

c) Какова будет длина модели дрона “Hermes 450”, если 0,5 метров дрона принять за 2 см модели? Результат округлите до целых.

d) Каков будет размах крыльев модели “Aerostar” в сантиметрах при соблюдении пропорций из 3-го пункта.

Zəfər tarixi

Azərbaycan Respublikasının ərazi bütövlüyünün bərpa edilməsi uğrunda aparılan Vətən savaşında şanlı ordumuz hərb tarixinə düşən yeni döyüş taktikasından istifadə etdi. Vətən Müharibəsi adlandırdığımız bu savaş dünya tarixində “Dron müharibəsi” kimi də yadda qalacaqdır.

II. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ ДИАГРАММ

Самым распространённым видом представления собранный информации является **диаграмма**.

ДИАГРАММА – это изображение информации с помощью геометрических фигур. Существуют разные виды диаграмм: *столбчатая диаграмма* (рисунок 6), *круговая диаграмма* (рисунок 7), *график* (рисунок 9), *пиктограмма* (рисунок 11) и др.. В столбчатой диаграмме (барграфе, гистограмме) за геометрическую фигуру применяют прямоугольник, в круговой диаграмме – круг. В зависимости от характера информации предпочтение отдаётся той или иной фигуре.

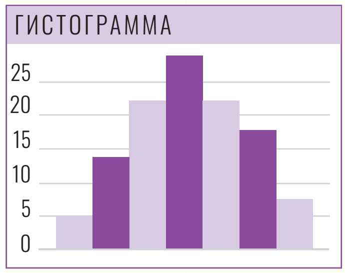
В барграфе и гистограмме, являющихся разновидностями столбчатой диаграммы, проводится сравнение высот столбцов – прямоугольников, построенных соответственно информации.

БАРГРАФ – это одностолбцовое отражение информации. Между столбцами барграфа устанавливают определённое расстояние.

ГИСТОГРАММА бывает одностолбцовая или многостолбцовая. Информация, представленная интервальным методом, изображается одностолбцовой гистограммой. Если представленная информация дается в сравнении по нескольким категориям, то применяется гистограмма со сгруппированными столбцами.

ГРАФИК или же линейный график – это линия, последовательно соединяющая отмеченные по имеющейся информации точки.

ПИКТОГРАММА – это изображение информации в виде некоторого рисунка.



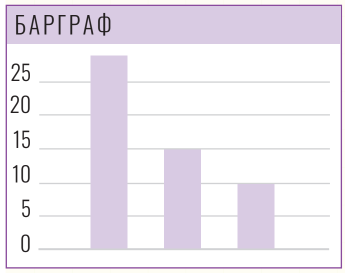


РИСУНОК 6

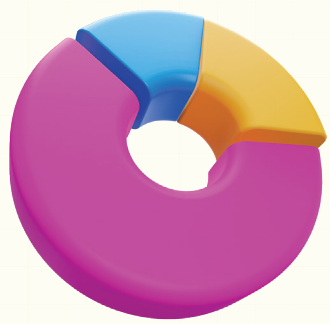


РИСУНОК 7

ПРИМЕР 1: Внимание школьников привлекают 3 популярные телепередачи:

1. *«Любимый учитель математики».*
2. *«Трудноразрешимые задачи по математике».*
3. *«Неизвестные».*

Среди 25 школьников был проведён опрос по теме «Какая из этих передач вам нравится больше всего?». Результаты опроса занесены в таблицу:

Название передачи	Количество школьников, выбравших передачу	Отношение к общему числу школьников	Запись отношения в виде десятичной дроби	Процент относительно общего числа школьников
«Любимый учитель математики»	9	$\frac{9}{25}$	0,36	36%
«Трудноразрешимые задачи по математике»	6	$\frac{6}{25}$	0,24	24%
«Неизвестные»	3	$\frac{3}{25}$	0,12	12%
«Никакая»	7	$\frac{7}{25}$	0,28	28%

Постройте по информации из таблицы столбчатую диаграмму, график и круговую диаграмму.

СТОЛБЧАТАЯ ДИАГРАММА (БАРГРАФ). Для построения барграфа выполним следующие действия (рисунок 8):

- *На горизонтальной оси в прямоугольной системе координат отметим названия передач.*
- *На вертикальной оси отметим на одинаковом удалении друг от друга все целые числа от 0 до 10 (количество школьников в таблице находится между этими числами).*
- *Количество школьников, смотрящих ту или иную передачу, изобразим соответствующим столбиком.*

Изображенные столбики легко сравнивать, не так ли? Выскажите своё мнение.

РИСУНОК 8

РИСУНОК 9

ГРАФИК (рисунок 9). В одной и той же прямоугольной системе координат числа 9; 6; 3 и 7 отмечают в виде точек в соответствии с телепередачей, полученные точки последовательно соединяют отрезками.

КРУГОВАЯ ДИАГРАММА

В этом случае каждая информация изображается в виде сектора круга. Каждый сектор отражает ту часть круга, которая отвечает числу, соответствующему информации.

Подготовительный этап:

1. Находят суммы данных: $(9+6+7+3=25)$
2. Выясняют какую часть от суммы составляет каждое из чисел:
   $(9:25=0{,}36=36\%,\quad 7:25=0{,}28=28\%,$
   $3:25=0{,}12=12\%,\quad 6:25=0{,}24=24\%)$
3. В соответствии с каждой найденной частью определяют центральный угол (для этого 360° умножьте на каждое из чисел, показывающих часть целого круга. Например: $360°\cdot 0{,}36\approx 130°$ и т.д.).

Этап построения:

1. Нарисуйте круг произвольного радиуса.
2. Постройте центральные углы (транспортиром).
3. Секторы, соответствующие центральным углам, раскрасьте различными цветами.
4. Дополнительно укажите числа, соответствующие цветам секторов.

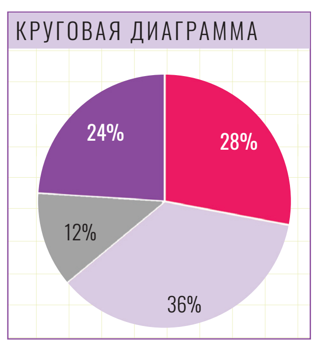


РИСУНОК 10

Как видим, сравнивать данные удобно по столбчатым, круговым или графическим диаграммам. Но существуют и другие способы представления информации.

ПРИМЕР 2: Среди школьников был проведен опрос по теме «Любимый музыкальный жанр». Представим полученную информацию пиктограммой (рисунок 11). На пиктограме представлено сколько школьников предпочитают тот или иной жанр музыки.

- Сколько всего школьников представлены в пиктограмме?
- Сколько школьников любят слушать мугам?
- Если бы каждый символ изображал 3 школьников, то сколько школьников любят слушать эстрадную музыку?
- Как по-вашему, насколько удачно было соответствие одного символа трём школьникам на этой пиктограмме? Почему?
- Как бы выглядела пиктограмма, в которой одному символу соответствует 2 школьника, если бы любителей рок-музыки было 50 человек? Объясните ответ.

РИСУНОК 11

Представим информацию по теме «Любимый музыкальный жанр» с помощью барграфа (рисунок 12):

- Как выбрать масштаб по вертикальной оси при построении барграфа?
- Постройте график, последовательно соединяя отрезками крайние точки барграфа. Какая из вышеуказанных форм представлений оказалась наиболее удачной при презентации по теме «Любимый музыкальный жанр»?

Объясните схожие и отличительные черты пиктограммы и барграфа.

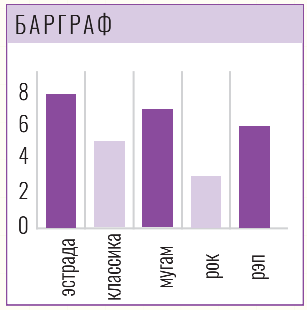
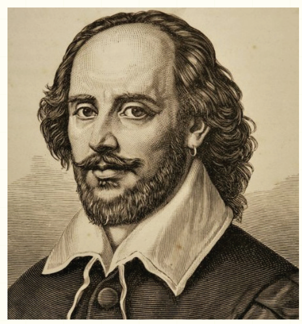


РИСУНОК 12

ПРИМЕР 3: В таблице показана информация о числе зрителей – мужчин и женщин, посмотревших в течении 3-х месяцев фильм по произведению «Гамлет» английского писателя Уильяма Шекспира.



ВИЛЬЯМ ШЕКСПИР

Месяцы	Число мужчин	Число женщин
Май	56	42
Июнь	38	67
Июль	44	50

По данным таблицы построим **гистограмму** (рисунок 13):

- По горизонтальной оси на равных расстояниях друг от друга отмечают наименование месяцев.
- По вертикальной оси отмечают целые числа от 1 до 100 с шагом 10.
- С помощью прямоугольников разных цветов для мужчин и женщин изображают число просмотров по месяцам.
- Сравните по диаграмме число просмотров мужчин и женщин по каждому месяцу.

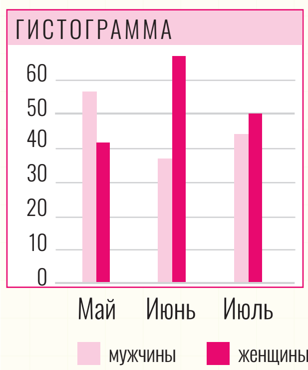


РИСУНОК 13

РИСУНОК 14

УПРАЖНЕНИЯ

1. В яблоневом саду посажено 20 деревьев.
Масса собранного осенью урожая с каждого дерева показана в таблице:

110 кг	91 кг	112 кг	89 кг	90 кг	84 кг	72 кг	95 кг	108 кг	95 кг
102 кг	89 кг	107 кг	88 кг	115 кг	112 кг	118 кг	125 кг	85 кг	77 кг

Дополните таблицу по образцу и ответьте на вопросы:

	70-79 кг	80-89 кг	90-99 кг	100-109 кг	110-119 кг	120-129 кг
Количество деревьев в указанном интервале	2	?	?	?	?	?
Процентное отношение от общего числа деревьев	$2:20=0{,}1=10\%$	?	?	?	?	?

1) Каково количество деревьев с массой собранного урожая
a) менее 100 кг; b) менее 120 кг?
2) Сколько процентов составляет число деревьев с массой урожая менее 90 кг к общему числу деревьев?
3) Постройте гистограмму по информации из третьего столбца.

Время (мин).	Числа рабочих
0-59	2
60-119	3
120-179	7
180-239	28
240-299	25
300-360	11

РИСУНОК 15

2. На рисунке 15 представлена таблица рабочего времени рабочих:
a) Сколько рабочих, рабочее время которых менее чем 2 часа?
b) Сколько рабочих, рабочее время которых более чем 5 часов?
c) По данным таблицы постройте график. Для этого в прямоугольной системе координат по оси абсцисс отметьте рабочее время, по оси ординат число рабочих. В соответствии с табличными данными отметьте точки и последовательно соедините их плавной линией. Выскажите свое мнение о полученном графике.

Способ передвижения	Число школьников	Отношение к общему числу
автобус	23	0,5
легковой автомобиль	6	?
электропоезд	1	?
пешком	10	?
метро	1	?
велосипед	5	?
всего	46	?

РИСУНОК 16

3. Ученики 7-го класса добираются в школу разными видами транспорта. Распределение количества этих видов транспорта показано в таблице на рисунке 16.
a) Дополните 3-й столбец таблицы. Представьте информацию второго столбца в виде столбчатой диаграммы, а информацию третьего столбца – в виде графика.
b) Сколько процентов составляет число школьников, пользующихся автобусом и легковым автомобилем, к общему числу учеников класса?
c) Сколько процентов составляет число школьников, пользующихся метро и электропоездом, к числу школьников, приезжающих в школу на автобусе?

4. Автомобиль года: Автомобильный журнал, применяя рейтинговую систему, оценивает автомобили и присваивает звание «автомобиль года» автомобилю, набравшему наибольшее количество баллов. Была произведена оценка 5 автомобилей, результаты которой приведены в таблице на рисунке 17.

автомобиль	обеспечение безопасности (Б)	экономия топлива (Э)	Внешний вид (В)	Удобство салона (У)	Рейтинг
I	3	1	2	3	
II	2	2	2	2	
III	3	1	3	2	
IV	1	3	3	3	
V	3	2	3	2	

РИСУНОК 17

Оценивание рейтинга автомобилей проводилось по следующей формуле Q = 3Б + Э + В + У.

a) Определите рейтинг каждого автомобиля, заполните последний столбец и определите «автомобиль года».

b) Производитель автомобилей I считает, что рейтинг проводится неправильно. Как надо изменить вышеуказанную формулу, чтобы автомобиль I получил самую высокую оценку: Q = ■ · Б + ■ · Э + ■ · В + ■ · У

5. На рисунке 18 дан график изменения температуры воздуха в течение дня. Определите наивысшую и наименьшую температуру в °C.

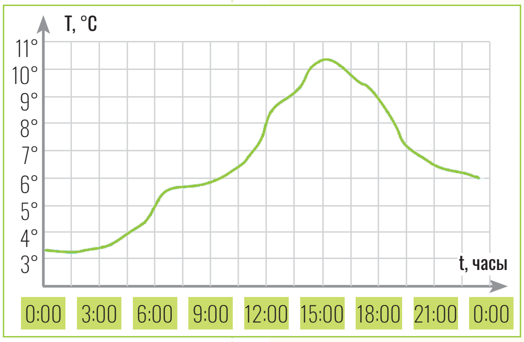


РИСУНОК 18

6. Оценивание: Набранные экзаменационные баллы 50 студентов показали, что никто ниже чем 450 баллов не набирал. Чтобы представить итоговые результаты табличным способом были выбраны следующие интервалы: $[450, 500), [500, 550), \ldots, [650, 700]$.
Баллы 12 студентов находятся в интервале [450; 500), баллы 16 студентов – в интервале [500; 550), баллы 10 студентов – в интервале [550; 600), баллы 8 студентов – в интервале [600; 650).
Ответьте на следующие вопросы:

a) сколько процентов составляет число студентов, баллы которых больше 500, к общему числу студентов?

б) сколько процентов составляет число студентов, баллы которых лежат в интервале [500; 550), к общему числу студентов?

c) сколько процентов составляет число студентов, набравших менее чем 550 баллов, к общему числу студентов?

d) сколько процентов составляет число студентов, набравших менее чем 650 баллов, к общему числу студентов? Используйте таблицу частот.

7. На линейчатой диаграмме представлено время в часах, потраченное школьником на изучение уроков за неделю (рисунок 19). Какую часть от общего затраченного времени составляет время, потраченное школьником на обучение по чётным дням?

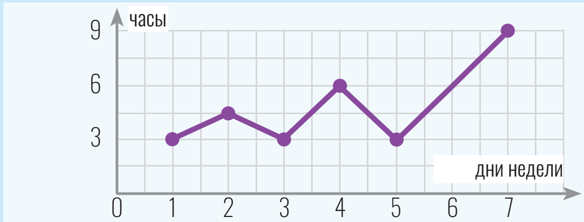


РИСУНОК 19

8. Площади материков на планете Земля показаны в нижеследующей таблице. Произведя необходимые вычисления на калькуляторе, заполните таблицу. По данным из таблицы постройте круговую диаграмму.

Название материка	Площадь млн. км^2	Часть	Процент %	Центральный угол в градусах
1. Европа	11,5	$11{,}5 : 150 \approx 0{,}07$	$0{,}07 \cdot 100\% = 7$	$360 \cdot 0{,}07 = 28$
2. Азия	43,4			
3. Америка	30,3			
4. Африка	42			
5. Австралия	8,7			
6. Антарктида	14,1			
Всего	150			

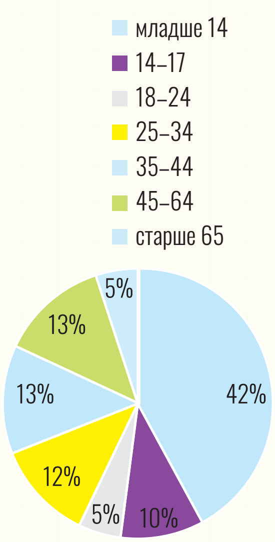
9. Среди действующих в городе организаций был проведён опрос об используемых ими в компьютерах антивирусных программах. Результаты проведённого опроса в процентах приведены в нижеследующей таблице:

Применяемость антивирусной программы в организации	Процент %
Антивирусная программа загружена на некоторых компьютерах	12
Антивирусная программа загружена на всех компьютерах	59
Предусмотрена загрузка антивирусной программы в последующие 12 месяцев	20
Не испытывает необходимости в антивирусной программе	9

a) По данным таблицы нарисуйте столбчатую и круговую диаграммы.

b) Какая диаграмма наиболее полно отражает представленную информацию?

c) Как по-вашему, на какой диаграмме было бы удобнее представить информацию?



10. **Спорт:** На круговой диаграмме показано в процентах число людей, предпочитающих спортивную обувь, по возрастным группам.

a) Численность каких двух возрастных групп составляет приблизительно 50% от всех пользователей спортивной обуви?

b) Численность каких двух возрастных групп составляет одну четвёртую числа всех пользователей спортивной обуви?

c) Каким ещё способом можно представить эту информацию?

11. Как по-вашему, какую из нижеследующей информации нецелесообразно представлять круговой диаграммой? Обоснуйте свой ответ.
   a) Определение наибольшего числа привлечённых к волонтёрскому движению по результатам опроса среди подростков;
   b) Определение числа родителей, оказывающих помощь своим детям при выполнении домашнего задания;
   c) Определение наиболее вкусных 5 блюд азербайджанской кухни.
   d) Исследование вопроса «Почему люди занимаются спортом»?

12. **Армия:** Из 83 военнослужащих, получивших звание «Герой Отечественной войны», 36 служили в Силах специального назначения, 21 – в Сухопутных войсках, 12 – в Пограничных войсках, 7 – Военно-воздушных силах, 4 – во Внутренних войсках, 2 – в Военно-морских силах. Место службы оставшегося одного военнослужащего носит секретный характер.
   a) Составьте таблицу по данной информации.
   b) Выразите численные данные в процентах.
   c) По данной информации постройте пиктограмму и круговую диаграмму.
   d) Выясните, какая из представлений наиболее целесообразна.

Знаете ли вы, что означает Фаренгейт?

Температура, в основном, измеряется в градусах Цельсия (°C), но иногда – в Фаренгейтах (°F). Между этими двумя единицами измерения температуры существует связь:

- При переводе градусов Цельсия в градусы Фаренгейта пользуются формулой: $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$
- При переводе градусов Фаренгейта в градусы Цельсия пользуются формулой: $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$

ПРИМЕР 1: Переведите 25°C в градусы Фаренгейта.

РЕШЕНИЕ: Применим формулу $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ при C=25:

$$F = \frac{9}{5} \cdot 25 + 32 = 77°F$$

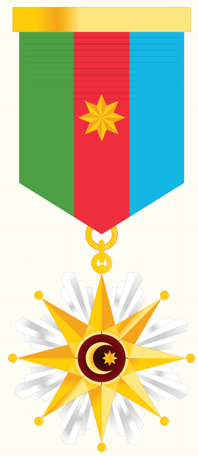
Ответ: 77°F.

ПРИМЕР 2: Переведите 68°F в градусы Цельсия.

РЕШЕНИЕ: Применим формулу $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$ при $F = 68$

$$C = \frac{5}{9} \cdot (68 - 32) = 20°C$$

Ответ: $20°C$.



МЕДАЛЬ ГЕРОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ

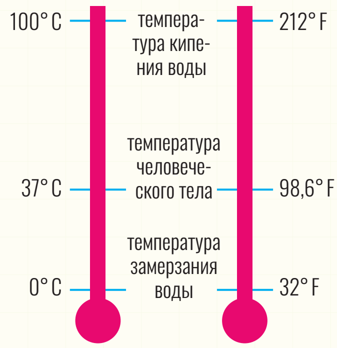


РИСУНОК 20

Для измерения температуры в Великобритании и США применяется шкала Фаренгейта: Принято $0°C=32°F$, $100°C=212°F$. На шкале Фаренгейта 180 делений, таким образом, $1°F = \frac{1}{180}$ всей линейки. Здесь $180°F=212°F–32°F$. То есть 1 деление по шкале Фаренгейта получено делением всей линейки на число, показывающее разность между температурой кипения и температурой замерзания воды. Эту шкалу в 1724 году предложил немецкий физик Даниель Габриель Фаренгейт.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите нижеуказанную температуру в градусах Фаренгейта:

a) 60°C; b) 15°C; c) 50°C; d) 30°C; e) 55°C;
f) 63°C; g) 5°C; h) 53°C; k) 47°C; m) 122°C.

2. Определите нижеуказанную температуру в градусах Цельсия:

a) 41°F; b) 113°F; c) 59°F; d) 149°F; e) 239°F;
f) 194°F; g) 95°F; h) 104°F; k) 80°F; m) 34° F.

3. В следующей таблице показана температура воздуха в январе в некоторых городах Азербайджана. Дополните таблицу и ответьте на вопросы:

a) Какова разница температур воздуха в городах Шуша и Баку в градусах Фаренгейта?

b) Какова была средняя температура воздуха в этих городах в градусах Фаренгейта?

	Баку	Гянджа	Шуша	Мингячевир	Шеки	Агдам
°C	14		20		16	
°F		64,4		75,2		62,6

4. **Повышение температуры:** По результатам исследований глобального потепления климата Земли учёные сообщают, что в следующие 60–70 лет средняя температура воздуха может повыситься от 4°F до 9°F. Это означает, например, что за январь месяц средняя температура вместо 65°F может достигнуть от 69°F до 74°F. Какова может быть средняя температура по этим городам за январь месяц в °C?

5. Перевод из °C в °F и наоборот на калькуляторе выполняют следующим способом?

1 60° C = ?	9 ÷ 5 × 60 + 32 = 140
2 140° F =?	140 – 32 = 108 × 5 ÷ 9 = 60

Дополните равенства, применяя калькулятор:

a) 32° C = ? F; b) 70° C = ? F;
c) 99° F = ? C; d) 159° F = ? C.

6. Температура жидкости в сосуде составляет 90°F. Наргиз нужно повысить эту температуру на 5°C. Сколько градусов Фаренгейта будет температура жидкости после подогрева?

7. Известно, что 86° F = 30° C. Можно ли утверждать, что 43° F = 15° C? Ответ обоснуйте.

3 Прогнозирование

Чтобы спланировать предстоящие дела люди внимательно отслеживают события во всех сферах деятельности и приходят к определённым выводам. Предположение о наступлении того или иного явления важная задача. Во все времена людей интересовало, как предугадать это событие.

Прогноз – это предположение о будущем состоянии происходящего явления. В переводе с греческого “pro” означает вперёд, “gnosis” – знание. Слово «прогноз» взято из соединения этих двух слов и носит смысл «видение наперёд».

Прогнозирование – это процесс обработки информации на основе научных методов и получения прогноза. Даже если и невозможно утверждать о наступлении прогноза, само прогнозирование является важным этапом в планировании человеческой деятельности. На основе прогнозирования разрабатываются всевозможные программы (планы), охватывающие различные временные интервалы.

ИССЛЕДОВАНИЕ: Линейчатый график на рисунке 21 показывает количество населения Земли с 1950 по 2020 гг.

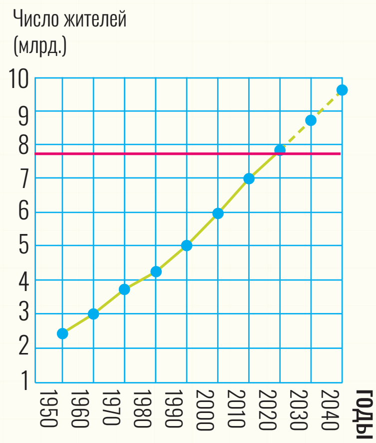


РИСУНОК 21

Используя линейчатый график, можно ответить на следующие вопросы и дать прогноз.

a) Сколько миллиардов было население в 1950 году?
Согласно графику в 1950 году население Земли было 2,5 миллиарда.

b) Как менялось население каждые 10 лет?
Изменение населения каждые 10 лет определяем приблизительно:
- С 1950 по 1960 годы население увеличилось на 0,5 млрд.
- С 1970 по 1980 годы население увеличилось на 0,4 млрд
- С 1990 по 2000 годы население увеличилось на 1 млрд.
- С 2010 по 2020 годы население увеличилось на 0,9 млрд.

c) Сколько млрд. составляло население в мире в 2020 году?
В 2020 году население составляло 7,8 млрд.

Прогнозы:

d) Сколько млрд. может быть население в 2030 году?
С 2020 по 2030 годы увеличение численности жителей Земли равно приблизительно 0,7–1 млрд. и к 2030 году составит 8,8–9 млрд.

e) Каково прогнозируемое увеличение население с 2030 по 2040 годы?
С 2030 по 2040 годы население Земли может увеличиться на 0,9–1 млрд.

f) Сколько млрд. может составить население мира в 2040-ом году?
Население мира в 2040-ом году может составить 10 млрд.

Страны	2019	2020	2021	2022
Япония	150000	150000	200000	
Азербайджан	460000	420000	490000	
США	680000	650000	640000	

РИСУНОК 22

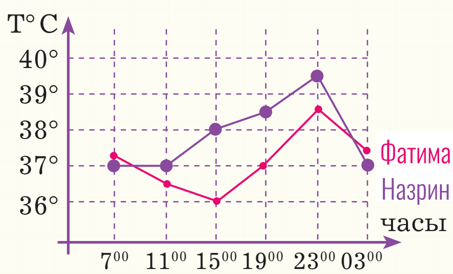


РИСУНОК 23

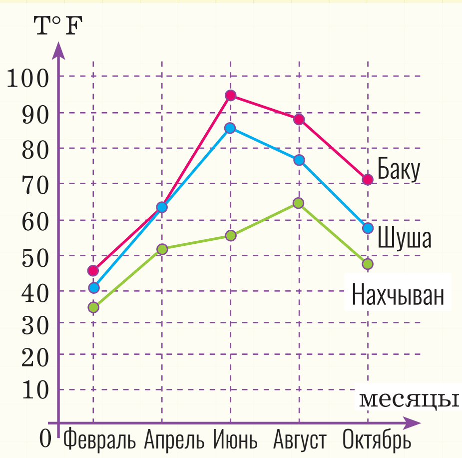


РИСУНОК 24

УПРАЖНЕНИЯ

1. На рисунке 22 показана количество гостей, въехавших в Турцию из некоторых стран, в 2019–2022 годах. Данные таблицы представьте в виде столбчатой диаграммы.
   a) Что можно сказать и спрогнозировать по этой диаграмме?
   b) Сколько может быть посетителей Турции в 2022 году?
   c) Для каких стран это число увеличится, а для каких уменьшится?

2. **Продажи:** В таблице представлена информация о продаже из 2-х автомобильных фирм трёхмесячными интервалами. По этой информации для каждой фирмы постройте столбчатую диаграмму. Что можно сказать и спрогнозировать по полученной диаграмме?

Месяцы	Фирма I	Фирма II
1-3	12	7
4-6	10	10
7-9	6	10
10-12	13	13

3. **Коронавирус:** На рисунке 23 изображены графики суточного изменения температуры тела больных коронавирусом Фатимы и Назрин. По графикам определите время, когда температура их тел была одинаковой, а также дайте прогноз о том, что можно ожидать в ближайшие часы.

4. **Температура воздуха:** На линейчатых графиках рисунка 24 показана информация о среднемесячной температуре воздуха в 3-х городах Азербайджана: Баку, Шуше и Нахчыване. Данные в Фаренгейтах переведите в Цельсии.
   a) Сможете ли вы сказать, какова была температура воздуха в ноябре в Баку, в Шуше и в Нахчыване?
   b) На сколько градусов температура воздуха в ноябре в Шуше будет ниже температуры в Баку?
   c) Какова разница температур воздуха в Баку и Нахчыване в декабре?
   d) Вычислите среднюю за эти месяцы температуру воздуха в вашей местности и сделайте предположение о температуре воздуха в следующем месяце.

5. Экономика: Часть карманных денег за неделю Ахмед откладывает и хочет купить на собранные деньги велосипед. Изначально у него было 10 ₼. Первую неделю он добавил к этим деньгам 3 ₼, вторую неделю – 4 ₼, 3-ю – 5 ₼ и так далее. В течение 10 недель каждую неделю он увеличивал собираемую сумму денег. Происходящее изображено с помощью столбчатой диаграммы (рисунок 25).

a) На какой неделе сумма денег Ахмеда удвоилась?

b) На какой неделе его собранная сумма денег ещё раз удвоилась?

c) На какой неделе можно ожидать очередное удвоение собранной Ахмедом суммы денег? Ответ объясните.

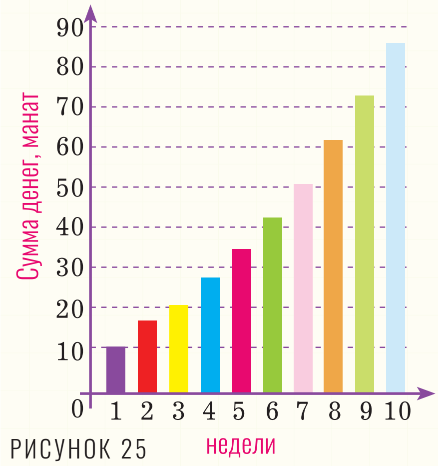
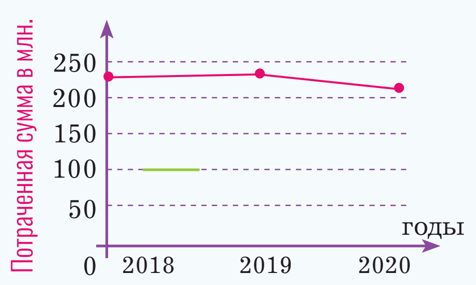


РИСУНОК 25



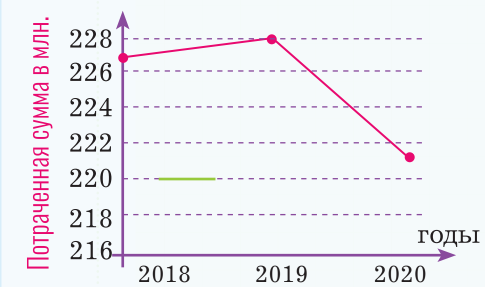


РИСУНОК 26

6. Мнимая статистика: На рисунке 26 показаны два графика, отражающих один и тот же процесс.

a) Сравнив графики, сможете ли вы сказать, на каком графике лучше видно уменьшение расходов в 2020 году?

b) Как по-вашему, в чём различие графиков? Почему графики, отражающие одинаковую информацию, выглядят по-разному? Объясните.

c) Сделайте прогноз о расходах в 2021 году по каждому из графиков.

7. 88, 86, 92, ...100 – последовательно полученные Нурай баллы тестового опроса по физике.

a) Информацию представьте на 2-х линейчатых графиках. На первом графике по горизонтальной оси указать баллы по шкале от 0 до 100, на втором графике – от 80 до 100.

b) Какой вывод можно сделать по первому графику?

c) А что можно сказать по второму графику?

8. Какую-нибудь информацию из интернета или газет представьте двумя способами так, чтобы выводы по ним отличались. Какое из представлений наиболее точно отражает представляемую информацию?

4 Вероятность события

Вероятность выпадения стороны с картой равна 50%

Вероятность события обозначается первой буквой английского слова «probability»: **P(A)**

Оценивание наступления того или иного события является важной проблемой. Например, по данным об атмосферном давлении, скорости и направлении ветра, температуры воздуха и другой аналогичной информации мы можем сделать прогноз погоды на завтра, другими словами, высказать вероятность о погоде.

Для оценивания наступления события проводят наблюдения и опыты, то есть собирают статическую информацию.

Результат проведённого опыта или наблюдения называется **элементарным событием**.

Например, при проведении опытов по бросанию монеты номиналом 50 гяпик может произойти два элементарных события: выпадение стороны с картой и выпадение стороны с «нефтяными вышками». Выпадение той или иной стороны кверху считаются равновозможными событиями. В этом опыте число всевозможных случаев два. Таким образом, выпадение кверху выбранной нами стороны считается благоприятным элементарным событием (**благоприятным случаем**) и составляет 50% от числа всех возможных случаев.

Вероятность обозначается буквой **P**. Вероятность события A обозначается **P(A)** (*или может записываться само явление, событие*, например P (дождь)).

$$P(A) = \frac{\text{Число благоприятных случаев для наступления события A}}{\text{Число всевозможных случаев}} \qquad P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

50% = 0,5 – это есть вероятность выпадения кверху одного из двух сторон монеты.

Вероятностное число может отличаться от результатов эксперимента. Это связано со многими неучтёнными причинами, оказывающими влияние на происходящее событие. Но с увеличением числа опытов частота появления события приближается к вероятностному числу.

Опыты: Бросим монету номиналом 50 гяпик 10 раз. Выпадение сторон запишем в таблицу. Что же произошло? Сколько раз выпала сторона с изображением карты?

Число событий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сторона с изображением карты	✓			✓		✓	✓	✓		✓
Сторона с изображением нефтяных вышек		✓	✓		✓				✓	

Как видим по таблице, всего было 10 случаев. Это есть число всевозможных случаев. Если выпадения стороны с изображением карты считать благоприятным случаем, то таких случаев 6.

Если при проведении n опытов (возможных случаев) событие А наступит κ раз (благоприятные случаи), то $\widetilde{P(A)} = \frac{k}{n}$ есть относительная частота события А. Относительная частота выпадения карты в нашем опыте равна $\frac{6}{10}$ = 0,6.

Как видим относительная частота выпадения карты $\widetilde{P(A)} = 0{,}6$ мало отличается от вычисленной ранее вероятности $P(A)$ = $0{,}5$.

Вероятность события можно представить с помощью числа или же в процентах. Вероятность события это число из отрезка [0; 1]. Изобразим вероятность события на числовой оси:

Событие не наступит	Наступление события маловероятное	Наступление события половина на половину	Наступление события высоковероятно	Событие обязательно произойдёт
$P = 0$ или 0%	$P < \frac{1}{2}$ или $P < 50\%$	$P = \frac{1}{2} = 0{,}5$ или 50%	$P > \frac{1}{2}$ или $P > 50\%$	$P = 1$ или 100%

- Вероятность равна «0» – это значит, что событие невозможное, т.е. не сможет произойти;
- Вероятность события равна $\frac{1}{2}$; значит, событие маловероятное;
- Вероятность события равна 1, то это значит, что событие обязательно произойдёт, достоверное событие;
- Чем ближе вероятность к 1, тем больше вероятность наступления события.

Вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0.
Почему?

ПРИМЕР 1: **Проверка качества:** Отдел проверки качества произведённых ламп провело проверку на отобранных 400 из них. 6 из них оказались бракованными.

a) Какова относительная частота бракованных ламп?

b) Сколько ламп из выпущенных 100000 вероятнее всего окажутся бракованными?

РЕШЕНИЕ: Общее число проверенных ламп 400, из них 6 оказались бракованными.

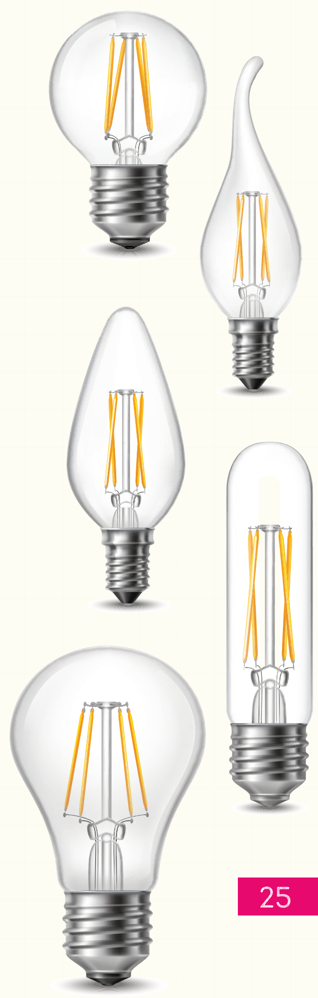
a) Тогда относительная частота брака равна $\frac{6}{400} = \frac{3}{200} = 0{,}015$ или 1,5%

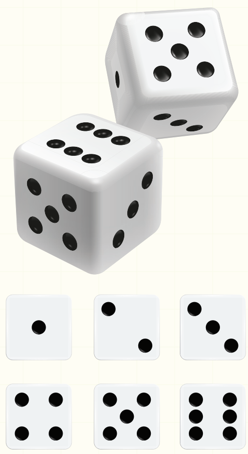
b) Так как из 400 ламп 1,5% оказались бракованными, то за вероятность брака примем 1,5%. Тогда 100000·1,5% = 1500 ламп:

$$100000 \cdot 1{,}5\% = 1500 \text{ ламп.}$$

Значит 1500 ламп могут оказаться бракованными.

Ответ: a) 1,5%; b) 1500





ПРИМЕР 2: Найдите вероятность выпадения нечётного числа при одноразовом сбрасывании игральной кости (зары).

РЕШЕНИЕ: При бросании игральной кости выпадение на верхней грани чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6 являются элементарными случайными событиями. Все эти события являются равновозможными и никакие два из них не могут произойти одновременно. Тогда число всевозможных элементарных случаев при сбрасывании одной игральной кости будет равно 6.

Из всех чисел, отмеченных на гранях зары, три являются нечётными: 1; 3; 5. Тогда «выпадение нечётного числа» – это событие, состоящее из трёх элементарных событий: либо 1, либо 3, либо 5. Значит, число благоприятных случаев этого события равно 3. Отсюда

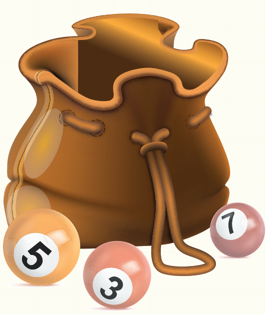
$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выясните, какие из событий достоверные или невозможные, укажите вероятности событий:
- a) все ученики получили «отлично» на очередном малом суммативном оценивании по математике;
- b) все завтрашние уроки будут заменены экскурсией;
- c) в последний сезон года будет зима;
- d) приведите другие примеры невозможных и достоверных событий.

2. Найдите вероятность выпадения чётного числа при одноразовом сбрасывании зары.



3. 10 одинаковых шариков в мешке отмечены числами от 1 до 10. Наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что номер выбранного шара меньше 5.

4. В тарелке 5 шекербура, 7 пахлава и 4 кята. Роя наугад берёт одно из сладостей. Какова вероятность того, что ей попадётся пахлава? Какова вероятность того, что ей попадётся кята?

5. 5 чашек бабушки разукрашены красным, а 12 – зелёным цветом. В случайным образом выбранную одну чашку она налила чай. Найдите вероятность того, что эта чашка окажется зелёного цвета.

6. Фишки в мешке отмечены всевозможными двузначными числами. Определите вероятности следующих событий при изъятии наугад из мешка одной фишки:
- a) число на фишке оканчивается цифрой 3;
- b) значащие цифры числа на фишке одинаковые;
- c) сумма цифр числа на фишке равна 5;

d) число на фишке кратно 6;

e) число на фишке оканчивается цифрой 7;

f) разность между числом десятков и числом единиц числа на фишке равна 2.

7. В настольной игре нарды сбрасывают две игральные зары, выпавшие числа складывают. Игрок выполняет движение шашками в количестве, равном полученной сумме. Чтобы не проиграть Сахибу, необходима сумма, равная 10. Как по-вашему, какова вероятность выпадения суммы 10? Какова вероятность выпадения (6–6)?

8. Случайным образом выберем одно из первых 100 натуральных чисел. Определите вероятности следующих событий:

a) выбранное число будет кратно 10;

b) выбранное число будет кратно 5;

c) выбранное число будет делиться на 12 с остатком 5;

d) сумма значащих цифр выбранного числа будет равна 7.

9. Найдите вероятности следующих событий при одновременном бросании двух зар (рисунок 27):

a) сумма выпавших очков будет равна 6;

b) модуль разности выпавших очков будет равен 2;

c) выпадет одинаковое число на каждой заре.

Результаты вычислений округлите до десятых.

10. Круг разделён на 8 равных секторов и части раскрашены в разные цвета. Прикреплённая концом к центру (оси) круга стрелка может свободно вращаться вокруг оси. Определите, сколько возможных случаев можно насчитать при повороте стрелки на какой-либо угол (рисунок 28).

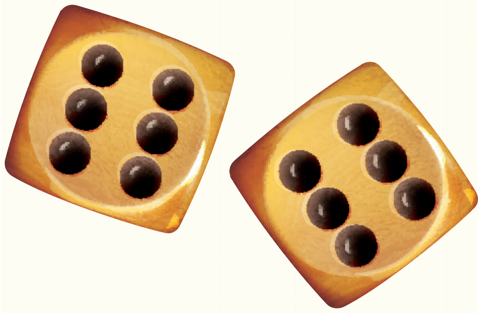
a) Какова вероятность попадания стрелки в жёлтый сектор?

b) Какова вероятность попадания стрелки в синий сектор?

c) Какова вероятность попадания стрелки в один синий сектор? Какова связь полученного числа с числом, полученным в пункте b).

d) Найдите вероятность попадания стрелки в красный сектор.

e) Найдите вероятность попадания стрелки на один красный сектор. Выясните зависимость полученного числа с числом, полученным в пункте d).



При бросании двух одинаковых зар в соответствии с комбинациями выпавших очков возможны 36 случаев:

1; 1	2; 1	3; 1	4; 1	5; 1	6; 1
1; 2	2; 2	3; 2	4; 2	5; 2	6; 2
1; 3	2; 3	3; 3	4; 3	5; 3	6; 3
1; 4	2; 4	3; 4	4; 4	5; 4	6; 4
1; 5	2; 5	3; 5	4; 5	5; 5	6; 5
1; 6	2; 6	3; 6	4; 6	5; 6	6; 6

РИСУНОК 27

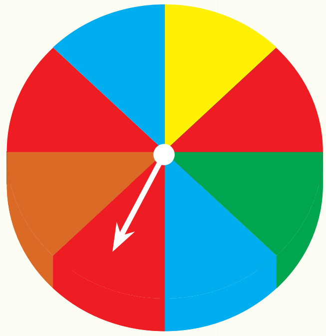


РИСУНОК 28

РАЗДЕЛ 1

5 Сумма вероятностей

Событие, заключающееся в том, что произойдёт хотя бы одно из двух событий A и B, называется **суммой событий** A и B.

События, которые не могут произойти одновременно, называются **несовместимыми** или несовместными событиями. Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Если сумма несовместимых событий является достоверным событием, то эти события взаимодополняющиеся.

Сумма вероятностей дополняющих друг друга событий равна 1.

ПРИМЕР 1: Найдём вероятность попадания стрелки вращения в жёлтый или коричневый сектора.

РЕШЕНИЕ: Стрелка вращения не сможет одновременно папасть и в жёлтый и в коричневый сектор. Значит, эти события несовместимые. Тогда $P(\text{коричневый}) = \frac{1}{8}$ и $P(\text{жёлтый}) = \frac{1}{8}$ (Почему?) вероятность попадания стрелки в жёлтый или коричневый сектора будет

$$P\ (\text{жёлтый или коричневый})\ = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,.$$

ПРИМЕР 2: Вероятность дождя на завтра по прогнозам метеорологов равна 0,3. Чему равна вероятность отсутствия дождя?

РЕШЕНИЕ: События «пойдёт дождь» и «дождя не будет» взаимодополняющихся события. Сумма вероятностей этих событий равна 1.

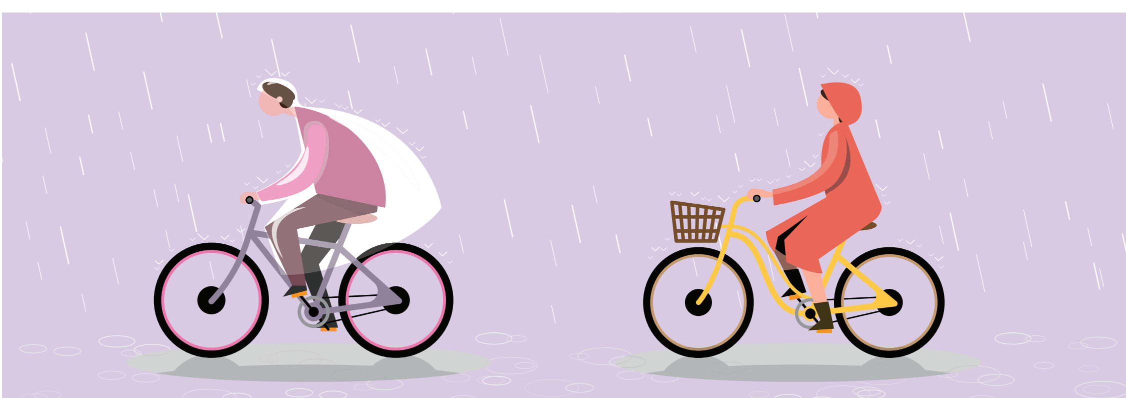
$$P\ (\text{пойдёт дождь}) + P\ (\text{дождя не будет}) = 1$$

Отсюда:

$$0{,}3 + P(\text{дождя не будет}) = 1$$

$$P(\text{дождя не будет}\ ) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Ответ: 0,7.



УПРАЖНЕНИЯ

1. Разделите круг на равные части (сектора) так, чтобы вероятность попадания стрелки вращения на красном секторе была P (красный) $=\frac{2}{5}$.

2. Найдите вероятность следующих событий при повороте вокруг оси стрелки вращения случайным образом на круге, разделённом на четыре равные части (рисунок 29):

a) P (красный или зелёный); b) P (не жёлтый); c) P (не чёрный).

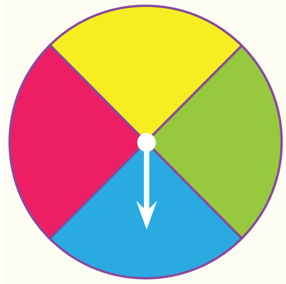


РИСУНОК 29

3. Найдите вероятности следующих событий при одноразовом бросании одной зары:

a) P(3); b) P(2 или 5); c) P(меньше 5);
d) P(не равно 6); e) P(простое число); f) P(9).

4. Промышленность: 4% выпущенной продукции игрушечной фабрики бракованные. Найдите вероятность того, что случайно выбранная игрушка из выпущенной партии будет качественной.

5. Алфавит: На 32 картонные карточки написаны буквы азербайджанского алфавита и сложены в коробку. Из коробки наугад изымается одна карточка. Найдите вероятность следующих событий:

a) P(m, n, p или t); b) P(я); c) P(мягкая гласная);
d) P(гласная); e) P(губная гласная); f) P(глухая согласная).

6. Школа: Ответ на тестовый вопрос содержит 5 вариантов: 1 верный, 4 неверных. Ответьте на следующие вопросы:

a) Какова вероятность угадывания правильного ответа школьником, не знающим ответа на поставленный вопрос?

b) Уменьшите число неверных ответов, удаляя некоторые из них. Как по-вашему, в этом случае уменьшится или увеличится вероятность угадывания верного ответа?

7. Реклама: Рекламная фирма, желая выбрать одну из предпочтительных реклам A, B или C, провела опрос среди потребителей. Результаты опроса по возрастным категориям приведены в таблице:

Возраст	A	B	C
Младше 18 лет	25	62	54
18-40	81	66	19
Старше 40 лет	13	29	98

a) Найдите относительную частоту выбора рекламы B или C среди лиц старше 40 лет.

b) Найдите относительную частоту выбора рекламы A или B среди лиц старше 18 лет. Результаты вычислений округлите до одной десятых.

	согласен	не согласен	воз-дер-жался
партия A	134	156	42
партия B	175	178	12
партия C	53	29	7

РИСУНОК 30

Холестерин – это жироподобное вещество, которое создается клетками печени в малом количестве. Однако это малое количество участвует в образовании желчи, гормонов, витамина D, оболочки всех клеток организма.

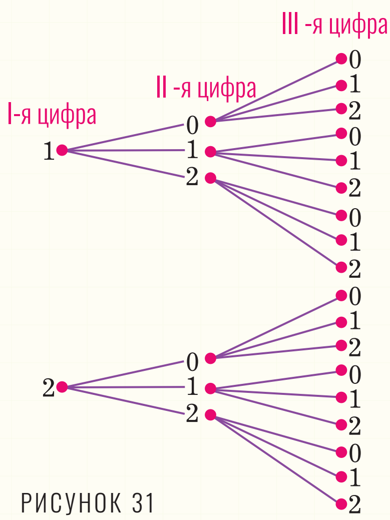


РИСУНОК 31

8. Политика: Чтобы выяснить отношение общества к принятому муниципальному решению, новостной журнал проводит опрос среди членов различных партий. Результаты опроса приведены в таблице (рисунок 30).

a) Найдите относительную частоту числа недовольных или воздержавшихся относительную членов партии A.

b) Найдите относительную частоту числа согласных или воздержавшихся партии B или C.

9. Здоровье: У 63-х из 248 взрослых пациентов и у 15 из 121 подростков при обследовании врач обнаружил повышенное содержание холестерина в крови.

a) Определите вероятность того, что у двух случайным образом отобранных пациентов обнаружится повышенное содержание холестерина в крови.

b) У скольких из 600000 жителей этого города вероятнее всего будет повышенное содержание холестерина в крови? Результат округлите до целых.

10. Найдите вероятность события, что при случайном выборе одного из трехзначных чисел, составленных из цифр 4, 5 и 8 без повторений, оно будет начинаться на 4 или 5.

11. Выпишите всевозможные трехзначные числа, составленные из цифр 0, 1 и 2 взятых из каждого по одному разу. Случайным образом выберите одно из этих чисел (рисунок 31).

a) Найдите вероятность того, что это число будет начинаться с 1;

b) Найдите вероятность того, что это число будет начинаться на 1 или 2;

c) Найдите вероятность того, что это число будет начинаться на 0 или 2.

12. Наргиз заметила, что при бросании монеты 5 раз подряд во всех случаях выпала одна и та же сторона. Как по-вашему, можно ли утверждать, что при последующих 20 бросаниях монеты вероятность выпадения той же стороны будет 100%? Ответ обоснуйте.

13. В мешке 10 красных, 5 зелёных, 25 жёлтых и 20 белых шаров.

a) Найдите вероятность того, что при случайном выборе из мешка одного шара он окажется белым.

b) Найдите вероятность того, что при случайном выборе из мешка одного шара он окажется или красным, или зелёным.

14. Одинаковые карточки в мешке перенумерованы двузначными числами. Случайным образом изъята одна карточка. Найдите вероятность события, что на этой карточке изображено нечётное число.

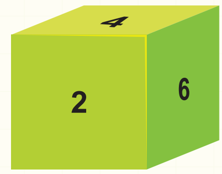
Обобщающие задания.

1. a) Преобразуйте в градусы Фаренгейта: $55°C$, $12°C$, $93°C$, $61°C$.

b) Преобразуйте в градусы Цельсия: $125°F$, $42°F$, $35°F$, $112°F$.

2. На гранях игрального куба нанесены числа 2; 4; 6; 8; 10 и 12. Куб бросают 30 раз. В результате 6 раз выпало 4, 12 раз выпало 8. Найдите относительную частоту следующих событий:

a) выпало 8; **b)** выпало 2, 6, 10, или 12



3. Автомобиль в разные дни проходил следующие расстояния: 270 км, 240 км, 320 км, 392 км, 275 км, 300 км, 259 км, 380 км, 270 км, 300 км, 300 км, 275 км

a) Составьте таблицу частот расстояний.

b) Найдите относительную частоту расстояний больших 290 км.

4. 30 одинаковых карточек перенумерованы и собраны в коробку. Не глядя, из коробки вынимают одну карточку. Какие из событий несовместны (или же взаимодополнящиеся)? Найдите вероятность следующих событий.

a) P(12); **b)** P(чётное число); **c)** P(простое число);
d) P(дробное число); **e)** P(меньше 1); **f)** P(больше 25);
g) P(кратное 2 или 3); **h)** P(число, оканчивающееся на 5).

5. В сумке 2 жёлтых, 1 красный, 5 синих и 3 зелёных шарика. Илаха 20 раз наугад достаёт из сумки один шар и возвращает обратно. Шар какого цвета чаще всего вынимала Илаха? Почему?

A) жёлтый; **B)** зелёный; **C)** красный; **D)** синий.

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6 образованы всевозможные двузначные числа. Сколько существует возможных вариантов чисел, если:

a) в записи числа значащие цифры могут повторяться;

b) в записи числа значащие цифры не могут повторяться?

В каждом из вышеуказанных пунктов найдите относительную частоту чисел, в разряде десятков которых находится или цифра 3, или цифра 6.

7. Инженер по качеству из 50 компьютеров выявил 3 неисправных.

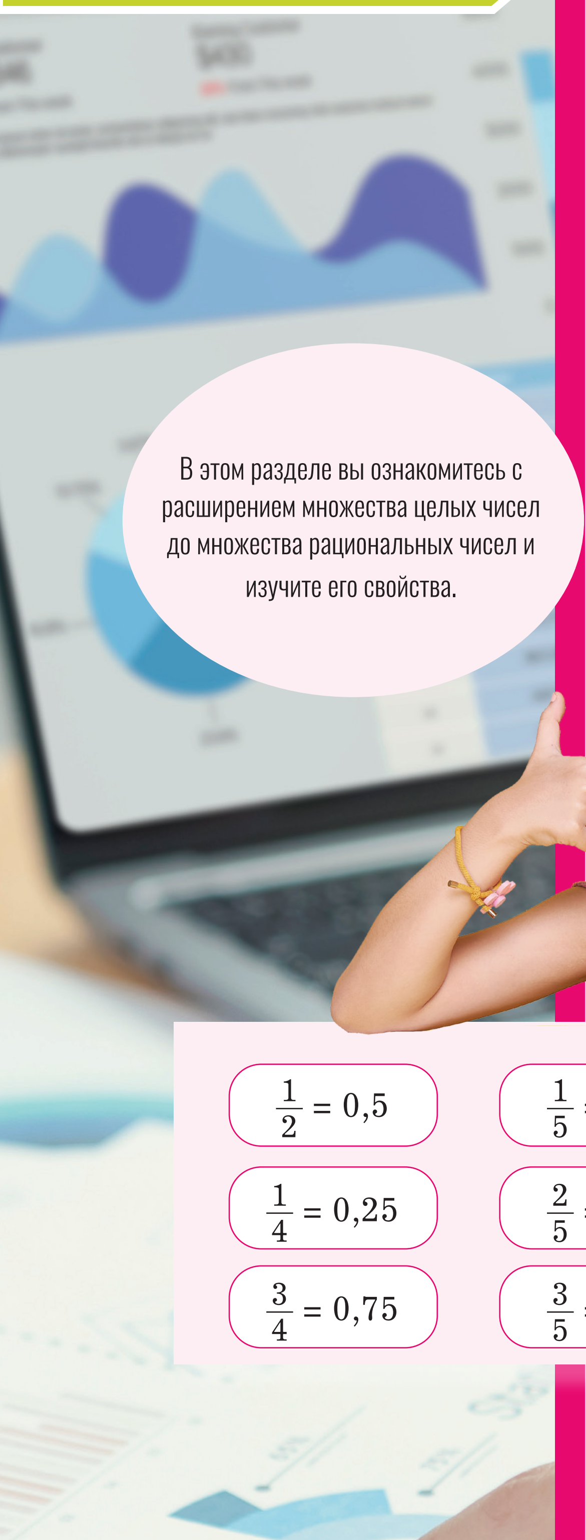
a) Каков процент брака в партии компьютеров?

b) Какова вероятность того, что наугад выбранный компьютер окажется исправным?

c) Сколько из 15000 собранных компьютеров вероятнее всего будут исправными?

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

РАЗДЕЛ 2



В этом разделе вы ознакомитесь с расширением множества целых чисел до множества рациональных чисел и изучите его свойства.

Числа, применяемые при подсчёте окружающих нас предметов, называются натуральными числами и обозначаются: N= {1; 2; 3; ...}. Добавлением к этому множеству числа 0 и чисел, противоположных натуральным числам, вы получили множество целых чисел. Это множество записывается как Z = {..., –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; ...}. Таким образом, было получено расширение множества натуральных чисел до множества целых чисел.

Вам также известно понятие обыкновенной дроби. Это число записанное в виде $\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}}$, где числитель и знаменатель являются некоторыми натуральными числами.

Вы изучили сложение, вычитание, деление, умножение, сравнение дробей, а также нахождение дроби, равной данной.

В этом разделе ваши знания о числах будут ещё более расширены до понятия множества **рациональных чисел**. Вы научитесь выполнять различные действия с рациональными числами.

В чём же необходимость изучения рациональных чисел? В жизни происходят такие явления, при описании которых ни натуральных, ни целых чисел бывает недостаточно. Поэтому приходится дальше расширять представления о числах.

$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{3} = 0{,}333...$
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{2}{3} = 0{,}666...$
$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$\frac{5}{8} = 0{,}625$	$\frac{1}{6} = 0{,}1666...$

1 Запись и чтение рациональных чисел

Слово «рациональный» возникло из понятия «отношение». Вам известно, что отношение двух чисел, например, 3:4, можно записать дробью, а именно $\frac{3}{4}$.

Точно также отношение $m:n$ можно записать как $\frac{m}{n}$.

Число, которое можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, называется **рациональным числом**.

Здесь m – целое число, n – натуральное число, $m \in Z$, $n \in N$.

Например, $\frac{5}{7}$ рациональное число, здесь 5 и 7 – натуральные числа. $-\frac{5}{7}$ – тоже рациональное число, здесь –5 – целое число, 7 – натуральное число.

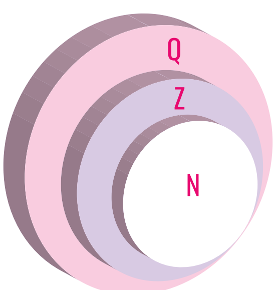
- Каждое натуральное число является рациональным числом:
  $7=7:1=\frac{7}{1}$; $7=35:5=\frac{35}{5}$; $125=250:2=\frac{250}{2}$.
- Каждое целое число является рациональным числом:
  $-12=-12:1=-(12:1)=-\frac{12}{1}$; $0=0:1=\frac{0}{1}$; $0=0:3=\frac{0}{3}$.
- Положительные целые и дробные числа являются положительными рациональными числами, отрицательные целые и дробные числа являются отрицательными рациональными числами.
- Знак «минус», стоящий перед дробью, можно записать или перед числом, находящимся в числителе, или же перед числом, находящимся в знаменателе:
  $-(2:11)=-\frac{2}{11}$; $-2:11=\frac{-2}{11}$; $2:(-11)=\frac{2}{-11}$.

Запомните: «0» – ни положительное, ни отрицательное рациональное число.

ПРИМЕР: Заданные рациональные числа представьте в виде дроби с натуральным знаменателем: 0,5; 1,3; – 0,25.

РЕШЕНИЕ: $0{,}5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; $1{,}3=1\frac{3}{10}=\frac{13}{10}$; $-0{,}25=-\frac{25}{100}=-\frac{1}{4}$.

Применим правило преобразования десятичной дроби в обыкновенную.



Множество рациональных чисел обозначается буквой Q:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle|\; m\in Z,\, n\in N\right\}.$$

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, а множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел: $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$.

Множество рациональных чисел, так же, как множество натуральных и целых чисел, является бесконечным множеством.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какое из нижеприведённых утверждений верно? Обоснуйте свой ответ примерами.

a) любое рациональное число является также натуральным числом;
b) любое целое число является также рациональным числом;
c) любое целое число является также натуральным числом;
d) любое натуральное число является также целым числом;
e) 0 – рациональное число, 1 не является рациональным числом;

2. Представить целые числа в виде дроби с каким-нибудь натуральным числом в знаменателе: -123; -98; -54; -15; -7; 0; 13; 100; 245; 543.

3. Запишите такое число, которое будет:

a) как целым, так и рациональным;
b) рациональным, но не дробным;
c) целым, но не натуральным;
d) смешанным числом

4. Выпишите подмножества множеств $A = \{14; 3{,}5; -5; 0; -8{,}2; \frac{4}{9}; -82; 12; 1\}$ и $B = \{-\frac{11}{15}; -22{,}3; -11; 1{,}7; 17; 22{,}1; 0{,}93\}$, элементы которого были бы:

a) целыми числами; b) натуральными числами;
c) отрицательными рациональными числами;
d) положительными рациональными числами.

5. 1) Запишите числа -7; 0; 9; 12; 100 в виде дроби со знаменателем:
a) 1; b) 3.

2) Запишите числа $-3{,}2$; $-0{,}8$; $4{,}5$; $83{,}5$ в виде дроби со знаменателем:
a) 10; b) 1000.

3) Запишите числа $-1{,}2$; $-0{,}33$; $-3\frac{13}{15}$; 6; 0; 12; $4{,}1$; $53{,}2$ в виде дроби с каким-либо натуральным числом в знаменателе.

Вспомните основное свойство дроби.

6. В пустые квадраты впишите необходимые числа и объясните истинность равенств.

a) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{15}{\square} = 1\frac{\square}{4}$;

c) $1{,}25 = 1\frac{\square}{4} = \frac{\square}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{\square}{100}$;

b) $\frac{3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{6}{\square} = \frac{\square}{28}$;

d) $-5{,}2 = -5\frac{\square}{10} = -5\frac{\square}{25} = \frac{\square}{100} = -\frac{27}{\square}$.

7. Запишите несколько дробей, равных по значению данным рациональным числам.

a) $\frac{15}{25}$; $-\frac{7}{12}$; $-3\frac{5}{15}$; $\frac{105}{45}$;

b) $-2{,}3$; $7{,}25$; $0{,}24$; $9{,}03$.

8. **Исследование:** 1) Дана дробь $\frac{2}{5}$. Умножим числитель и знаменатель этой дроби на 4. Во сколько раз разность знаменателя и числителя полученной дроби больше такой же разности первоначальной дроби?

2) Пусть разность знаменателя и числителя дроби $\frac{a}{b}$ равна к. Во сколько раз разность знаменателя и числителя дроби $\frac{ma}{mb}$ будет больше, чем к?

РАЗДЕЛ 2

2 Периодическая десятичная дробь

Любое рациональное число, можно представить в виде десятичной дроби (бесконечной или конечной).

ПРИМЕР 1: $\frac{11}{100} = 11 : 100 = 0{,}11;$ $\frac{112}{25} = 112 : 25 = 4{,}48$

Существуют дроби, при делении числителя которых на знаменатель, то есть при преобразовании их в десятичную дробь, процесс деления продолжается бесконечно.

ПРИМЕР 2: $\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666...;$

$\frac{73}{30} = 73 : 30 = 2{,}4333...;$

$\frac{8}{11} = 8 : 11 = 0{,}727272...$

$$\begin{array}{l|l} -2 & 3 \\ \ \ 0 & 0{,}666... \\ -20 & \\ \ \ 18 & \\ \ -20 & \\ \ \ \ 18 & \\ \ \ \ ... & \end{array}$$

Если в записи десятичной дроби одна цифра или группа из нескольких цифр бесконечно повторяются, то такую десятичную дробь называют **периодической десятичной дробью.** Повторяющаяся группа цифр образует так называемый период.

Для краткой записи периодических десятичных дробей повторяющуюся цифру или группу цифр (период) записывают в скобках: $0{,}666... = 0{,}(6);$ $2{,}4333... = 2{,}4(3);$ $0{,}7272... = 0{,}(72).$

Запомните:
Бесконечную периодическую десятичную дробь 0,464646... можно записывать с указанием периода 0,(46); 0, (46 46); 0,4 (64) и так далее. Из этих форм целесообразнее брать самую короткую форму: 0,464646... = 0,(46).

Определить, в конечную или бесконечную периодическую дробь преобразуется данная дробь, можно по разложению знаменателя дроби на простые множители.

$$\begin{array}{l|l} -7 & 25 \\ \ \ 0 & 0{,}28 \\ -70 & \\ \ \ 50 & \\ \ -200 & \\ \ \ \ 200 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

- Если разложение на простые множители знаменателя несократимой дроби состоит только из «2» или только из «5», или же только из обоих этих чисел, то дробь преобразуется в конечную десятичную дробь:

$\frac{7}{25} = 0{,}28;$ $\frac{11}{16} = 0{,}6875;$ $\frac{19}{40} = 0{,}475.$

Дроби:
$\frac{7}{25}; \frac{11}{16}; \frac{19}{40}$ – несократимые
$25 = 5 \cdot 5;$
$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2;$
$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$
Значит, при делении получится конечная десятичная дробь.

$$\begin{array}{l|l} -53 & 12 \\ \ \ 48 & 4{,}41666... \\ \ -50 & \\ \ \ \ 48 & \\ \ \ -20 & \\ \ \ \ \ 12 & \\ \ \ \ -80 & \\ \ \ \ \ \ 72 & \\ \ \ \ \ -80 & \\ \ \ \ \ \ \ 72 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 8... & \end{array}$$

- Если в разложении знаменателя несократимой дроби на простые множители, кроме 2 и 5, появляются и другие простые множители, то эта дробь преобразуется в периодическую десятичную дробь.

$\frac{7}{9} = 0{,}777... = 0{,}(7);$

$\frac{53}{12} = 4{,}41666... = 4{,}41(6);$

$3\frac{7}{45} = 3{,}1555... = 3{,}1(5).$

Дроби $\frac{7}{9}; \frac{53}{12}; \frac{7}{45}$ – несократимые
$9 = 3 \cdot 3;$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3;$
$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5.$
Значит, при делении получится периодическая десятичная дробь.

7,345(43)

Целая часть — 7; Цифра (группа цифр) до периодической части — 345; Периодически повторяющиеся цифры (группа цифр) — (43)

Существует 2 вида периодических десятичных дробей:

Периодические десятичные дроби

- **Чистые периодические десятичные дроби**

  Десятичная дробь, в которой сразу после запятой начинается период, называется чистой периодической десятичной дробью.
  Например: 2,(5); 0,(37); 12,(524)

- **Смешанные периодические десятичные дроби**

  Десятичная дробь, в которой после запятой до периодической части имеется цифра или группа цифр, называется **смешанной периодической десятичной дробью**.
  Например: 8,7(5); 0,02(63); 4,0(172)

Запомните:

0,(6) Чтение: **ноль целых шесть в периоде.**

2,4(3) Чтение: **две целых четыре и три в периоде.**

0,(72) Чтение: **ноль целых семьдесят два в периоде.**

1,34(85) Чтение: **одна целая тридцать четыре и восемьдесят пять в периоде.**

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выпишите такое подмножество множества A= {3,4; 0,(7); 2,003; 5,333...; 32,(56); 0,444; 6,98(3); 0,(345); 1,43(12); 0,5; 8,111; 2,0(7)}, чтобы его элементы являлись:

a) периодическими десятичными дробями;
b) чистыми периодическими десятичными дробями;
c) смешанными периодическими десятичными дробями;
d) конечными десятичными дробями.

2. Определите вид периодической десятичной дроби и выпишите её периодическую часть:
0,1666...; 2,32999...; 21,823823823...; 9,09323232...; 1,64026402...; 3,454545...; 0,123444...; 3066,666...; 0,24752475...; 93,02654654... .

3. Данные периодические десятичные дроби исследуйте по образцам из таблицы:
0,777...; 0,54222...; 9,8101010...; 3023,555...; 29,00787878...; 8,0020202...; 0,191919...; 3,678678678...; 0,73827382...; 12,8(23); 0,(92); 2,09(254).

Число	Короткая запись	Целая часть	Группа повторяющихся цифр	Цифры, расположенные до периодической части	Количество цифр в периодической части	Количество цифр в непериодической части
1,090909...	1,(09)	1	09	–	2	0
78,12666...	78,12(6)	78	6	12	1	2

4. Заданные дроби запишите в виде десятичной дроби. Определите предварительно, какие из них преобразуются в конечные, а какие – в периодические десятичные дроби.

$\frac{1}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{17}{28}$; $\frac{30}{32}$; $\frac{10}{48}$; $\frac{21}{50}$; $\frac{16}{72}$; $\frac{10}{75}$; $\frac{20}{99}$; $\frac{84}{200}$; $\frac{465}{555}$; $\frac{999}{1000}$.

5. Илаха утверждает, что дроби $\frac{3}{12}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{49}{14}$; $\frac{18}{36}$; $\frac{121}{55}$ можно обратить в конечные десятичные дроби. Как по-вашему, права ли она? Обоснуйте ответ.

УКАЗАНИЕ:
Знаменатели дробей разлагайте на простые множители только после того, как вы твердо будете уверены в несократимости дроби.

6. Исследуйте алгоритм обращения смешанного числа в десятичную дробь:

1) Запишите смешанное число в виде суммы целой и дробной части. Разделите числитель дробной части на знаменатель.
Пример: $5\frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = 5 + 0{,}(3)$

2) Сложите полученную при делении дробь с целым числом в целой части смешанного числа: $5 + 0{,}(3) = 5{,}(3)$.
Полученное число является искомым.

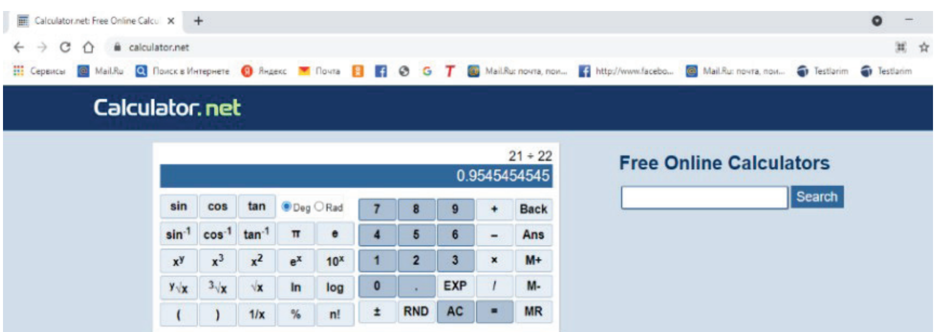
По этому алгоритму обратите числа $1\frac{11}{15}$; $3\frac{7}{12}$; $\frac{45}{12}$; $2\frac{41}{49}$ в периодическую десятичную дробь. Выясните к какому виду десятичной дроби они относятся.

7. Ахмед обратил $\frac{53}{12}$ в десятичную дробь и получил 4,416(6). Верен ли результат Ахмеда?

8. Запишите несколько дробей со знаменателем 9; 99; 999; 9999 и обратите их в десятичные дроби. Каким свойством обладают эти дроби? Объясните.

9. **Калькулятор:** Применив калькулятор, обратите дроби $\frac{21}{22}$; $\frac{19}{48}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{900}$; $\frac{92}{999}$; $\frac{37}{75}$; $\frac{15}{22}$ в десятичные дроби (можно использовать онлайн-калькулятор: *https://www.calculator.net/, https://okcalc.com/ru/*)

Обратите внимание на запись числа на экране калькулятора. Выразите мнение о последней цифре в ответе. Определите и запишите период числа.



10. Запишите какую-нибудь периодическую десятичную дробь, находящуюся между числами 0,5 и 0,75. Выскажите мнение о количестве таких дробей. Сколько периодических десятичных дробей расположено между любыми двумя рациональными числами?

РАЗДЕЛ 2

3 Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную

ВНИМАНИЕ:
Периодические десятичные дроби являются рациональными числами.
Почему?

Любую периодическую дробь можно обратить в обыкновенную. Правила обращения чистой периодической десятичной дроби и смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную отличаются.

ОБРАЩЕНИЕ ЧИСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ В ОБЫКНОВЕННУЮ

При обращении чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную целая часть остаётся неизменной, в дробной части в знаменателе ставится столько девяток, сколько цифр в периоде, в числителе ставится число, выражающее период дроби.

Запись $\overline{bcd...к}$ показывает многозначность числа. **Например**, $\overline{abc}$ – трёхзначное число.

$0,8=\frac{8}{9}$

Количество цифр в периоде и «9» в знаменателе одинаковое (один).

$1,(034)=1\frac{34}{999}$

Количество цифр в периоде и «9» в знаменателе одинаковое (три).

$a,(\overline{bcd...k})=\frac{\overline{bcd...k}}{\underbrace{99...9}_{m\ \text{штук}}}$

m штук

ОБРАЩЕНИЕ СМЕШАННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ В ОБЫКНОВЕННУЮ:

При обращении смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную целая часть остаётся неизменной; в знаменателе записываем сначала цифру «9» столько раз, сколько цифр в периоде, затем цифру «0» столько раз, сколько цифр между запятой и периодом; в числителе записываем разность между числом, стоящим после запятой и числом, стоящим после запятой до периода.

В смешанной периодической десятичной дроби 0,12(3)
- 0 – целая часть,
- 123 – число после запятой,
- 12 – число между запятой и периодом,
- 3 – число, стоящее в периоде.

Количество цифр между запятой и периодом и количество нулей в знаменателе одинаковое (два).

$$0,12(3)=\frac{123-12}{900}=\frac{111}{900}=\frac{37}{300}$$

Количество цифр в периоде и количество 9 в знаменателе одинаковое (один).

УПРАЖНЕНИЯ

Одна звёздочка означает одну цифру

1. В заданных равенствах вместо * впишите необходимые цифры:

a) $0,(8)=\frac{8}{*}$; b) $1,(7)=*\frac{*}{9}$; c) $10,(45)=10\frac{*}{*}$;

d) $0,1(6)=\frac{*}{6}$; e) $8,7(5)=8\frac{**}{90}$; f) $15,2(34)=**\frac{232}{***}$.

2. a) Заданные чистые периодические десятичные дроби обратите в обыкновенные:
$0,(2)$; $1,(3)$; $3,(54)$; $21,(23)$; $0,(673)$; $7,(256)$; $16,(002)$; $0,(0001)$; $5,(01)$;

b) заданные смешанные периодические десятичные дроби обратите в обыкновенные:

$0,1(3);\ 1,2(5);\ 7,0(4);\ 2,23(7);\ 10,1(45);\ 0,25(83);\ 16,5(02);\ 0,000(1).$

3. Запишите числа в виде обыкновенной дроби: **a)** $2,(7)$ и $2,4(7)$; **b)** $0,(54)$ и $0,3(54)$. Разницу в обращении обсудите.

4. Дополните таблицу:

N	Периодическая десятичная дробь	Обыкновенная дробь	Числитель	Знаменатель	Целая часть
1)	$0,(28)$				
2)		$\frac{6}{11}$			
3)			17	51	
4)	$6,2(46)$				
5)		$\frac{101}{90}$			
6)			35	45	1

5. Обратите данные смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные путём разложения на разрядные слагаемые так, как указано в образце:

a) $1,2(5)$; **b)** $0,23(4)$; **c)** $7,9(2)$;
d) $1,5(4)$; **e)** $0,64(7)$; **f)** $0,25(14)$.

6. Найдите ошибку в записях. А как записать верно?

a) $8,(m)=8\frac{m}{10}$; **b)** $0,a(bc)=\frac{\overline{abc}-a}{999}$; **c)** $1,m(nmm)=1\frac{\overline{mnm}-m}{90}$

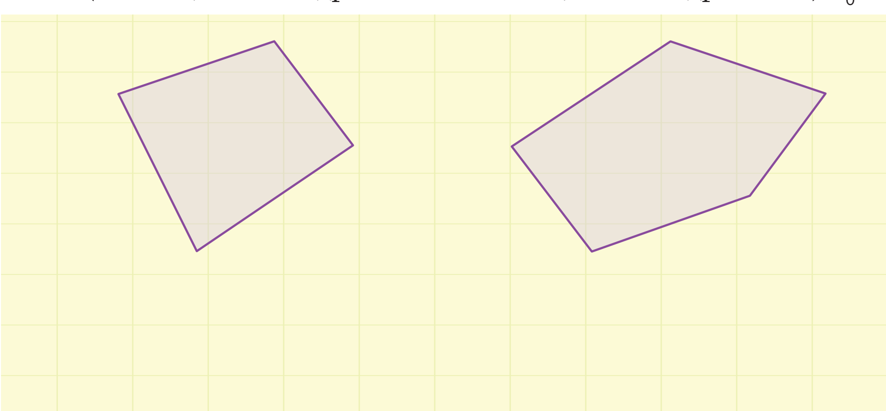
7. Запишите числа $0,(a)$ və $7,b(a)$ в виде обыкновенной дроби (здесь a и b – некоторые цифры).

8. Исследуйте выполнимость равенств: $1,(9)=2$; $3,(9)=4$; $-2,(99)=-3$; $6,56(9)=6,57$; $0,2(999)=0,3$. В какие числа обратятся числа $7,(9999)$; $0,12(99)$; $-3,8(999)$ таким же способом? Объясните, почему в этих примерах периодическая десятичная дробь обращается в конечную десятичную дробь или в целое число.

9. Определите площадь фигур, изображённых на рисунке. Примите площадь каждой клетки, равной $S_0 = 2,(6)$ см^2. Площадь фигур запишите в мм^2.

Указание: При вычислениях периодические десятичные дроби обратите в обыкновенные и вспомните правило измерения площади фигур с помощью палетки:

S = (число целых квадратов + число нецелых квадратов : 2) S_0



Внимание: Существуют и другие способы обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные.

Образец:

$3,1(7)=3+0,1+0,0(7)=$

$=3+\frac{1}{10}+\frac{7}{90}=$

$=3+\frac{9}{90}+\frac{7}{90}=3\frac{16}{90}=$

$=3\frac{8}{45}=\frac{143}{45}$

ВНИМАНИЕ:

$0,(9)=\frac{9}{9}=1$

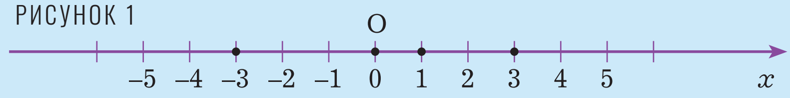
РАЗДЕЛ 2

4 Изображение рациональных чисел на числовой оси

Прямая, на которой отмечено начало отсчёта (точка **O**), указано положительное направление и единичный отрезок, называется **числовой осью**.

Вам известно, что справа от нуля на числовой оси располагаются положительные, слева – отрицательные целые числа (рисунок 1). Вы умеете определять местоположение обыкновенных дробей на числовой оси.

РИСУНОК 1



Запомните: Числовую ось иногда называют **координатной осью**. Начало отсчета – **начало координат**.

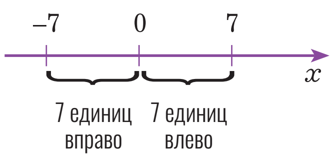


РИСУНОК 2

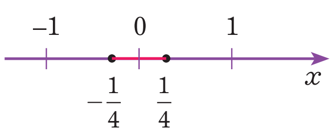


РИСУНОК 3

А теперь выясним, как располагаются на числовой оси рациональные числа. Например, определим местоположение рационального числа $-\frac{1}{4}$ на числовой оси. Так же, как и целые числа, положительные рациональные числа на числовой оси расположены справа от нуля, отрицательные – слева. Тогда число $-\frac{1}{4}$ как отрицательное рациональное расположено слева от 0.

$-\frac{1}{4}$ взаимно противоположно числу $\frac{1}{4}$. Противоположные числа расположены на числовой оси на одинаковом расстоянии от начала отсчёта (точка 0) (например, 7 и –7 расположены на числовой оси соответственно справа от 0 и слева от 0 на расстоянии семь единиц). Точно так же рациональные числа $\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4}$ расположены соответственно справа и слева от 0 на одинаковом расстоянии. Известно, что $\frac{1}{4}$ расположено между числами 0 и 1, тогда $-\frac{1}{4}$ расположено между числами –1 и 0 (рисунок 3).

Таким образом, каждому рациональному числу $r \in \mathbf{Q}$ на числовой оси соответствует единственная точка A. Если число r положительно, то эта точка **A** на числовой оси расположена справа от точки отсчёта **O**, если же число r отрицательно, то точка **A** расположена слева от точки **O**, на расстоянии $|r|$. $OA = |r|$.

ПРИМЕР: Отметьте точки $A(-3,6)$, $B(-2\frac{3}{4})$, $C(0,5)$, $D(-4,(3))$ на числовой оси.

РЕШЕНИЕ: Координаты заданных точек являются дробными числами, обыкновенной и периодической десятичной дробью. Расположим эти числа на числовой оси.

- число $-3,6$ отрицательно и расположено между целыми числами -4 и -3.
- число $-2\frac{3}{4} = -2,75$ отрицательно и расположено между целыми числами –3 и –2.

- число 0,5 положительно и расположено между целыми числами 0 и 1.
- периодическая десятичная дробь –4,(3) является отрицательным рациональным числом и находится между целыми числами –5 и –4, так как противоположное ему число 4,(3) расположено между целыми числами 4 и 5 (рисунок 4).

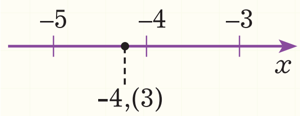


РИСУНОК 4

Заданные числа можно расположить на числовой оси следующим образом (рисунок 5).

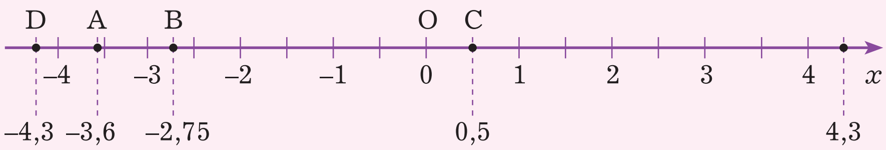


РИСУНОК 5

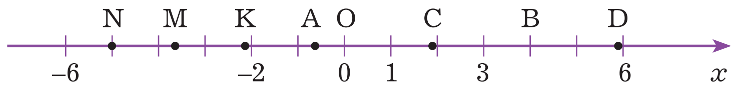
УПРАЖНЕНИЯ

1. a) Выскажите мнение о координатах точек, лежащих на числовой оси левее начала отсчёта, правее начала отсчёта и совпадающих с началом отсчёта.
   b) Что вы можете сказать о координатах точек, расположенных на одинаковом расстоянии от начала отсчёта?
   c) Существуют ли точки на числовой оси с наибольшей и наименьшей координатой?

2. Выясните истинность или ложность следующих утверждений:
   a) число −3,2 расположено между целыми числами −3 и −2;
   b) число 9,0 (67) расположено между числами 9 и 9,1;
   c) число 8, (9) расположено между числами 8 и 9;
   d) число −11, 3(6) расположено на числовой оси правее начала отсчёта на расстоянии $11\frac{11}{30}$.

3. Отметьте на числовой оси точки, соответствующие числам:
   $-4\frac{1}{2}$; $-3{,}4$; $-1{,}2$; $-0{,}8$; $0{,}(6)$; $1\frac{3}{5}$; $4{,}(5)$; $7{,}8(4)$; $-2\frac{2}{9}$.

4. Определите приблизительно координаты точек, отмеченных на числовой оси:



   Запишите координаты точек C и K с помощью периодических десятичных дробей.

5. Определите расстояние от начала отсчёта до следующих точек на числовой оси: A(5,8); B(−2,78); C(0,(56)); D(−3,67(4)).

Как найти расстояние между двумя точками с заданными координатами на числовой оси?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Найдём расстояние между произвольными двумя отмеченными точками на числовой оси. При этом рассмотрим 2 случая:

Заданные точки расположены на числовой оси по одну и ту же сторону от начала отсчёта точки O.

Например, на рисунке 6 точки A и B расположены слева или справа от точки O:

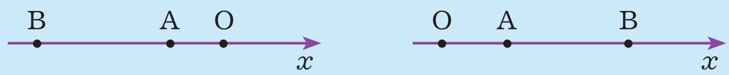


РИСУНОК 6

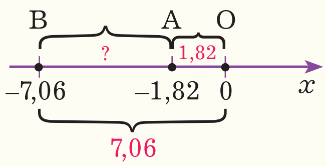


РИСУНОК 7

Исследование 1: Пусть требуется найти расстояние между точками A(–1,82) и (–7,06). Как видим, точки A и B расположены слева от начала отсчёта (рисунок 7). Известно, что расстояние от точки O до точки A равно $OA=|-1{,}82|=1{,}82$ единиц. Расстояние от точки O до точки B равно $OB=|-7{,}06|=7{,}06$ единиц.

Тогда $AB=OB-OA=7{,}06-1{,}82=-1{,}82-(-7{,}06)=5{,}24$ единиц.

Заданные точки расположены на числовой оси по разные стороны от начала отсчета точки O.

Например, точки M и N находятся от точки O по разные стороны (рисунок 8).

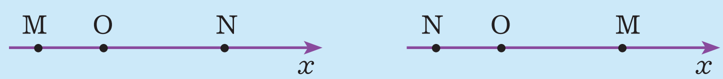


РИСУНОК 8

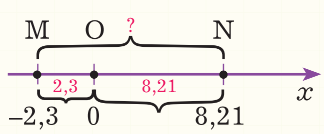


РИСУНОК 9

Исследование 2: Пусть требуется найти расстояние между точками M(–2,3) и N(8,21). Точки M и N находятся на числовой оси по разные стороны от начала отсчёта (рисунок 9). Расстояние от точки O до точки M равно $OM=|-2{,}3|=2{,}3$ единиц, расстояние от точки O до точки N равно $ON=|8{,}21|=8{,}21$ единиц.

Тогда $MN=OM+ON=2{,}3+8{,}21=8{,}21-(-2{,}3)=10{,}51$ единиц.

Оба исследования показывают, что при вычислении расстояния между двумя точками следует от координаты правой точки вычесть координату левой точки.

Таким образом, можно привести следующее правило:

Расстояние AB между двумя точками A(x) и B(y) на числовой оси равно модулю разности координат этих точек: $AB=|x-y|$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите расстояние между заданными точками:

a) $A(3,46)$ и $B(7,89)$;
b) $M(-2,45)$ и $N(-9,2)$;
c) $C(-2,(4))$ и $D(0,(7))$;
d) $F(-7,8(4))$ и $D(-1,(45))$;
e) $K\left(-\frac{3}{11}\right)$ и $F\left(-\frac{7}{21}\right)$;
f) $E\left(3\frac{6}{7}\right)$ и $H\left(-2\frac{3}{5}\right)$.

2. a) Найдите расстояние между точками A и B на рисунке 10.

b) Определите более рациональный способ нахождения расстояния между двумя точками на числовой оси, координаты которых являются противоположными числами.

c) Отметьте точку C между точками A и B с целой координатой и найдите длину отрезков AC и BC.

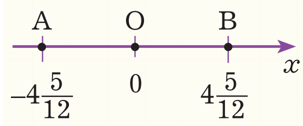


РИСУНОК 10

3. Какие действия надо выполнить, чтобы определить координату точки K на рисунке 11? Найдите эту координату.

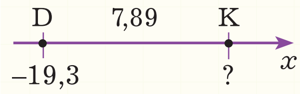


РИСУНОК 11

4. a) Найдите координату точки N, если $MN = 3,54$ и $M(-2,9)$;
b) Найдите координату точки M, если $MN = 6,(8)$ и $N(4,35)$.

5. a) Найдите координаты точек на числовой оси, расположенных на расстоянии 11 единиц от точки с координатой 5, и найдите сумму этих координат.

b) Найдите целые координаты точек на числовой оси, расположенных от точки с координатой −3 на расстоянии менее чем 8 единиц.

c) Найдите координаты каких-нибудь трёх точек на числовой оси, расположенных от точки с координатой −25 на расстоянии более чем 100 единиц.

6. Вычислите $AB + AC - BC + DK - DC$,
если $A(-3)$, $B(-2,5)$, $C(13)$, $D(0)$, $K(-100)$

7. На числовой оси отмечены 30 точек, первая из которых $A(-5)$, последняя – $B(x)$. Расстояние между соседними точками 4 см. Найдите расстояние между крайними точками.

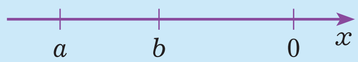
РАЗДЕЛ 2

5 Сравнение рациональных чисел

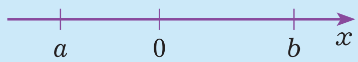
Вы знакомы с правилами сравнения натуральных, целых и дробных чисел. Знаете, что из двух чисел с разными знаками число со знаком «плюс» больше числа со знаком «минус» и нуля (почему?). При сравнении отрицательных чисел число, имеющее больший модуль, меньше числа, имеющего меньший модуль (*например*: $-12{,}6<-9{,}3$). Сравнение рациональных чисел происходит подобным же образом.

Рассмотрим 3 случая расположения рациональных чисел на числовой оси:

рациональные числа a и b расположены на числовой оси правее начала отсчёта 0



рациональные числа a и b расположены на числовой оси левее начала отсчёта 0



рациональные числа a и b расположены на числовой оси по разные стороны от начала отсчёта 0

Запомни: На числовой оси число, расположенное правее, всегда больше.

ПРИМЕР: Сравните рациональные числа 2,(34) и 2,34.

РЕШЕНИЕ: Данные числа одинакового знака, поэтому при их сравнении, начиная с наибольшего разряда, сопоставляем цифры, стоящие на одинаковых разрядах.

$2,(34)$ – это периодическая десятичная дробь. Запишем её в раскрытом виде: $2,(34) = 2,343434\ldots$.

$2,34$ – конечная десятичная дробь. К её концу можно приписать бесконечное количество нулей: $2,34 = 2,34000\ldots$

Как видим, в обоих числах в разрядах целых, десятых и сотых стоят одинаковые цифры. Но в разряде тысячных в числе 2,(34) стоит 3, а в числе 2,34 стоит 0. И так как 3>0, то и 2,(34)>2,34.

ОТВЕТ: $2,(34) > 2,34$.

$-2,343434\ldots$

$-2,340000\ldots$

При сравнении чисел $-2,(34)$ и $-2,34$ число с большим модулем принимается меньшим другого числа:

$$|2,(34)| > |2,34|.$$

Тогда $-2,(34) < -2,34$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сравните рациональные числа:

a) $5,(8)$ и $-12,(9)$; b) $3,(5)$ и $3,55$;
c) $-2,(67)$ и $-2,676$; d) 11 и $10,(99)$;
e) $21,56(5)$ и $21,5657$; f) $-0,78(3)$ и $-0,(78)$.

2. Сравните числа и вставьте знаки <, > и = в пустые квадраты:

a) $\frac{-5}{7}\square\frac{2}{3}$; b) $\frac{-4}{5}\square\frac{-5}{7}$; c) $\frac{-7}{8}\square\frac{14}{-16}$;

d) $\frac{-8}{5}\square\frac{-7}{4}$; e) $\frac{-1}{3}\square\frac{1}{-4}$; f) $\frac{-5}{11}\square\frac{5}{-11}$;

g) $0\ \square\ \frac{-2}{9}$; h) $\frac{-5}{9}\square-0{,}5$.

Дроби одинакового знака можно сравнить, приведя к общему знаменателю.

Каким ещё другим способом можете сравнить числа?

3. Между какими двумя последовательными целыми числами расположены заданные рациональные числа?

$2{,}(87);\quad -0{,}2(3);\quad \frac{2}{7};\quad \frac{11}{9};\quad -\frac{66}{12};\quad 31{,}(9);\quad -581{,}1(9).$

Какие числа близки к данным числам на не более чем 0,5 единиц?

4. Сравните числа, указав приблизительно их расположение на числовой оси.

a) $1{,}2$ и $1{,}(2)$; b) $-3{,}55$ и $-3{,}(5)$;

c) $-2\frac{23}{99}$ и $-2\frac{23}{90}$; d) $\frac{17}{45}$ и $\frac{1}{3}$

5. Расположите приблизительно точки $A\left(\frac{7}{99}\right)$, $B(-1(23))$, $C(-4{,}0(9))$, $D(-3{,}5)$, $E(-3(5))$, $K\left(-\frac{58}{19}\right)$ на числовой оси и определите крайнюю правую и крайнюю левую точки. Определите расстояние между этими крайними точками.

6. a) Запишите заданные числа по возрастанию:

$\frac{-3}{5};\ \frac{-3}{5};\ \frac{-3}{5};\ -\frac{15}{7};\ \frac{4}{-15};\ -3\frac{1}{12};\ \frac{7}{20};\ \frac{25}{7};\ -0{,}3;\ -3{,}(5).$

b) Запишите заданные числа по убыванию:

$-2{,}3;\ \frac{-2}{9};\ \frac{13}{11};\ \frac{-34}{34};\ -\frac{1}{5};\ \frac{4}{-17};\ -1\frac{1}{13};\ \frac{7}{2};\ \frac{20}{27};\ 0{,}5;\ -2{,}(3).$

При расположении по возрастанию каждое следующее число больше предыдущего. А как по убыванию?

7. На рисунке 12 отмечены числа m и n. Ответьте на следующие вопросы:

a) Что вы можете сказать о знаках чисел m и n?

Где расположены на этой же числовой оси числа $-m$, $-n$, $2m$, $3n$, $\frac{1}{3}m$, $1\frac{1}{2}n$?

b) Какое из чисел $3n$ или $\frac{1}{3}n$ больше?

c) Модуль какого из чисел n или $0{,}5\ m$ меньше?

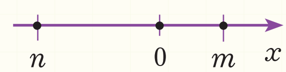


РИСУНОК 12

8. На числовой оси изображены точки с координатами a и b. (рисунок 13, a, b, c).

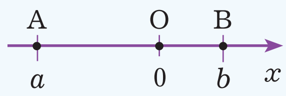


РИСУНОК 13, a

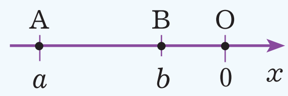


РИСУНОК 13, b

РИСУНОК 13, c

a) Укажите на числовой оси приблизительно местоположение точек с координатами $b + a$, $a - b$ и $b - a$

b) Выясните, какое число больше:
$a + b$, $a - b$ или $b - a$?

c) Модуль какого из чисел $a + b$, $a - b$ и $b - a$ наименьший?

9. **a)** Если модуль одного числа больше модуля второго числа, то можно ли утверждать, что первое число больше второго?

b) Если модуль одного из двух отрицательных чисел больше модуля другого, то что можно сказать об их взаимном расположении?

10. Обоснуйте ответы на вопросы примерами:

a) Может ли сумма двух чисел быть больше одного из них и меньше другого?

b) Может ли сумма двух чисел быть меньше каждого из них?

c) Может ли сумма двух чисел быть больше каждого из них?

d) Может ли произведение двух чисел быть больше каждого из них?

e) Может ли сумма двух чисел быть равной их произведению?

f) Может ли сумма двух чисел быть больше их произведения?

11. **Исследование:** **1)** Числа p и k отрицательны.

Объясните утверждения:

a) $|p| > |k|$; **b)** $p > k$; **c)** $p < k$

УКАЗАНИЕ: Исследуйте, расположив на числовой оси.

2) Числа m и n отрицательны. Сравните модули этих чисел (рассмотрите все случаи).

3) Числа a и b имеют разные знаки. Сравните модули этих чисел (рассмотрите все случаи).

РАЗДЕЛ 2

6 Неравенства с модулем

Координата любой точки на числовой оси, расположенной между двумя точками, меньше координаты левой точки, но больше координаты правой точки.

Например, пусть координата произвольно взятой точки А будет x (рисунок 14). По рисунку видно, что $x<5$ и $x>-3$ (или же $-3<x$). Объединив эти два неравенства, можно записать: $-3<x<5$.

РИСУНОК 14

Неравенства вида $\boldsymbol{a<x<b}$, $\boldsymbol{a\le x<b}$, $\boldsymbol{a<x\le b}$ или $\boldsymbol{a\le x\le b}$ **называются двойными** (здесь a и b данные рациональные числа.).

Обычно в двойных неравенствах применяют знаки < или ≤, но их можно записать и с помощью знаков > или ≥: $b>x>a$, $b>x\ge a$, $b\ge x>a$ или $\boldsymbol{b\ge x\ge a}$.

Множество решений двойного неравенства (значения x) изображают так, как на рисунке 15:

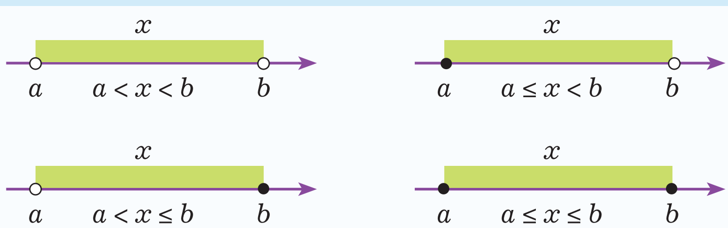
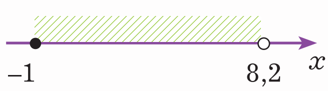


РИСУНОК 15

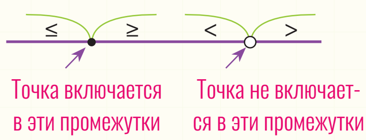
ПРИМЕР: Числа x, являющиеся решениями двойного неравенства $-1\le x<8{,}2$ больше или равны –1, но меньше 8,2. На числовой оси этим x соответствуют точки с координатами от –1 (–1 включительно) до 8,2 (рисунок 16).

РИСУНОК 16



Запомните:

При применении строгого неравенства (< или >) координата концевой точки не включается во множество решений этого неравенства, на числовой оси координата этой точки отмечается пустым кружком. При применении нестрогого неравенства (≤ или ≥) координата концевой точки включается во множество решений неравенства, на числовой оси координата этой точки отмечается закрашенным кружком.



Какова связь между двойными неравенствами и модулем?

ЗАПИСЬ ДВОЙНОГО НЕРАВЕНСТВА С ПОМОЩЬЮ НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Решением двойного неравенства $-7<x<7$ является любое рациональное число x большее -7 и меньшее 7.

Неравенства с модулем меньшим какого-нибудь числа

a) Неравенство $-7<x<7$ можно записать с помощью знака модуля: $|x| < 7$. Действительно, все рациональные числа, модуль которых меньше 7, принадлежат интервалу (–7; 7) (рисунок 17*a*).

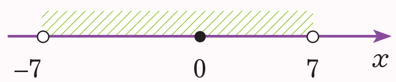


РИСУНОК 17, *a*

b) Неравенство $|x| \le 7$ равносильно двойному неравенству $-7 \le x \le 7$, значит, множество его решений – это координаты точек числовой оси, принадлежащих отрезку [–7; 7] (рисунок 17*b*).

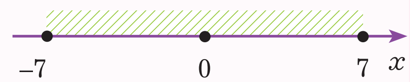


РИСУНОК 17, *b*

Равносильность означает одинаковость множеств решений.

Неравенство $|x| < a$ равносильно неравенству $\boldsymbol{-a < x < a}$,
неравенство $|x| \le a$ равносильно неравенству $\boldsymbol{-a \le x \le a}$.

Неравенства с модулем большим какого-нибудь числа

a) решением неравенства $|x| > 4$ является число y, расстояние от которого до начала отсчета («0») больше 4 единиц (то есть решение больше 4 и меньше –4). Точки, координатами которых являются эти числа, на числовой оси расположены левее «–4» и правее «4» (рисунок 18 *a*): $x < -4$ или $x > 4$

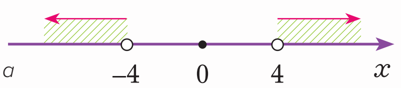


РИСУНОК 18, *a*

b) решением неравенства $|x| > 4$ является число y, расстояние от которого до начала отсчета («0») не меньше 4 единиц (то есть расстояние или равно 4, или же больше 4). В этом случае числа –4 и 4 входят во множество решений неравенства (рисунок 18 *b*): $x \le -4$ или $x \ge 4$

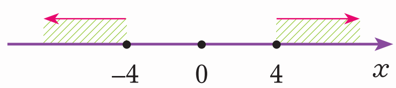


РИСУНОК 18, *b*

Неравенство $|x| > a$ равносильно совокупности неравенств $\boldsymbol{x < -a}$ и $\boldsymbol{x > a}$, неравенство $|x| \ge a$ равносильно совокупности неравенств $\boldsymbol{x \le -a}$ и $\boldsymbol{x \ge a}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Прочтите данные двойные неравенства и запишите с помощью двух отдельных неравенств:

a) $-0{,}8 < x < 3{,}4$; b) $6{,}8 \le y < 11$; c) $-100 \le a \le 112$;

d) $\frac{1}{3} < b \le 3\frac{1}{3}$; e) $2\frac{5}{8} \ge m > 0$; f) $-4{,}(5) > n \ge -8\frac{2}{9}$.

2. Запишите данные выражения с помощью двойных неравенств:

a) число a больше 8, но меньше $12{,}3$;

b) число y больше $-3,(4)$, но меньше или равно 0;

c) число $5{,}6$ больше или равно x и число x больше или равно $0{,}75$;

d) число m расположено между числами –11,9 (3) и 4,5;

e) число p не меньше –2 и не больше 2;

f) наибольшим целым значением числа k является 100 и наименьшим целым значением является число –25.

3. Заданные два неравенства записать в виде двойного неравенства:

a) $x \geq 0$ и $x \leq 4{,}2$; b) $y > -5$ и $y \leq 7{,}8(56)$; c) $a < 0$ и $a \geq -\frac{22}{7}$.

4. Выпишите целые решения заданных двойных неравенств и назовите их количество:

a) $0{,}3 < x < 7{,}3$; b) $-11{,}6 \leq y < 11{,}6$;

c) $-45{,}1 < z \leq -40{,}5$; d) $\frac{17}{4} \leq k \leq \frac{83}{9}$.

5. Выпишите натуральные решения заданных двойных неравенств и назовите их количество:

a) $-12,(2) < a < 5$; b) $7{,}5(7) \leq b < 10{,}1$,

c) $-5{,}9 < c \leq 0$; d) $4\frac{1}{2} \leq d \leq \frac{53}{5}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее целое решение двойного неравенства:

a) $9{,}1 < m < 12$; b) $-5,(3) \leq n < -1,(9)$,

c) $-129 < k \leq 0$; d) $-3\frac{3}{5} \leq p \leq \frac{35}{12}$.

7. Из чисел -4; $-7{,}6$; $-0{,}2$; 0; $1{,}2$; $3{,}45$; $7{,}6(12)$ выберите те, которые входят во множество решений неравенства:

a) $-8 \leq x \leq -0{,}4$; b) $-5 \leq y < 0$; c) $|m| < -3$;

d) $|b| \geq -2$; e) $|x + 1| < 7$; f) $|y - 7| < 9$.

8. Следующие выражения запишите в виде неравенств и приведите какое-нибудь решение:

a) сумма чисел a и -3 меньше $-0{,}5$;

b) модуль числа x не превышает числа $4{,}5(7)$;

c) модуль разности чисел b и $11,(2)$ не меньше 3;

d) разность чисел m и $1,(23)$ меньше разности чисел $7{,}4$ и $9,(4)$.

9. Прочтите нижеуказанные неравенства и выпишите несколько рациональных решений:

a) $-1 \leq m \leq 2$; b) $0 \leq n \leq 11{,}2$; c) $|y| \geq -3$; d) $|x| \leq -24$;

e) $|b| \leq 0$; f) $|p| < 0$; g) $|x - 4| \leq 5$; h) $|9 - x| \geq 7$.

10. Запишите несколько рациональных чисел, удовлетворяющих заданным неравенствам:

a) $|x + 2{,}1| < 3{,}5$; b) $|x - 2{,}1| > 6$; c) $|12 - x| \geq 0$;

d) $|y| + 3 < 7{,}5$; e) $2{,}3 + |m| \leq 3,(7)$; f) $|x| + 3|x| \geq 21$.

11. a) Ширина AB прямоугольника ABCD меньше стороны AD (рисунок 19). Запишите неравенство для определения ширины. Найдите натуральные числа, являющиеся возможными значениями длины стороны AB.

b) Периметр треугольника ABCD меньше 36 *мм*. Каковы возможные наибольшее и наименьшее натуральные значения ширины прямоугольника?

c) Периметр треугольника больше 34 *см*, но меньше 37 *см*. Стороны AB и BC соответственно равны 14 *см* и 12 *см*. Между какими двумя целыми числами расположено значение длины стороны AC (рисунок 20)?

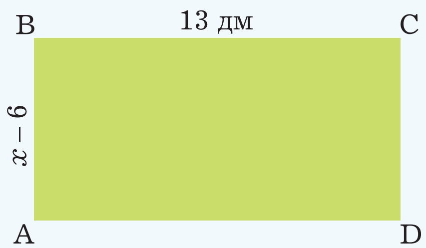


РИСУНОК 19

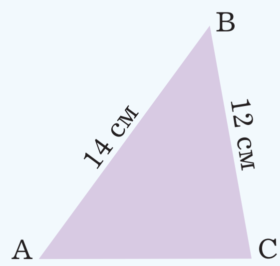


РИСУНОК 20

12. 1) Напишите неравенство, целыми решениями которого является нижеуказанное множество:

a) $x = \{2; 3; 4; ...\}$; **b)** $y = \{...; -5; -4; -3\}$;

c) $x = \{-12; -11; -10; -9\}$;

2) Напишите неравенство с неизвестной, находящейся под знаком модуля, целыми решениями которого является следующее множество:

a) $x = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; **b)** $y = \{-1; 0; 1\}$;

c) $x = \varnothing$.

13. Напишите наибольшее и наименьшее целое решение неравенства:

a) $|x| \le 4$; **b)** $|m| \le 4,(6)$; **c)** $|x| < \frac{3}{5}$; **d)** $-3 < x \le 9$;

e) как по-вашему, существуют ли наибольшее и наименьшее целые решения неравенств $|x| \le -2$, $|x| \le 0$, $|x| < 0$

14. Запишите несколько чисел, удовлетворяющих неравенствам $11 - m \ge 0$ и $|11 - m| \ge 0$. Запишите число, удовлетворяющее второму и не удовлетворяющее первому неравенству.

15. Выскажите мнение о неравенстве

a) $|x| > a$ при $a < 0$; **b)** $|x| > a$ при $a > 0$;

c) $|x| < a$ при $a < 0$; **d)** $|x| < a$ при $a > 0$;

e) $|x| \le a$ при $a \le 0$; **f)** $|x| \le a$ при $a \ge 0$.

16. Запишите такое неравенство с неизвестной под модулем, чтобы оно

a) имело одно решение; **b)** не имело решений;

c) имело бесконечно много решений.

РАЗДЕЛ 2

7 Действия над рациональными числами и свойства

Рациональные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить. Результат этих действий тоже будет рациональным числом.

СЛОЖЕНИЕ: Сложение рациональных чисел выполняется так же, как в целых и дробных числах. Выполним сложение следующих рациональных чисел:

1) $7{,}6+2{,}(3)=7\frac{6}{10}+2\frac{3}{9}=7\frac{3}{5}+2\frac{1}{3}=7\frac{9}{15}+2\frac{5}{15}=9\frac{14}{15}.$

2) $-12\frac{11}{17}+\left(-\frac{1}{4}\right)=-12\frac{44}{68}+\left(-\frac{17}{68}\right)=-12\frac{61}{68}.$

Переместительное свойство сложения	От перестановки мест слагаемых сумма не меняется: $a + b = b + a$

ПРИМЕР 1: Проверьте выполнимость переместительного свойства сложения

$$\frac{-8}{17}+\frac{-2}{51}=\frac{-24}{51}+\frac{-2}{51}=\frac{-26}{51};\qquad \frac{-2}{51}+\frac{-8}{17}=\frac{-2}{51}+\frac{-24}{51}=\frac{-26}{51}$$

Сочетательное свойство сложения	Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

ПРИМЕР 2: Вычислим сумму $(1{,}23 + 24{,}5) + 5{,}27$, применив сочетательное свойство сложения. Как видим, удобнее к первому слагаемому прибавить третье, а затем второе. Применим переместительное и сочетательное свойства, получим:

$(1{,}23 + 24{,}5) + 5{,}27 = (1{,}23 + 5{,}27) + 24{,}5 = 6{,}5 + 24{,}5 = 31.$

ВЫЧИТАНИЕ: Сложение чисел с разными знаками выполняется как вычитание этих чисел.

1) $2{,}6+(-5{,}8)=-(5{,}8-2{,}6)=-3{,}2;$ 2) $5+\left(-\frac{3}{7}\right)=5-\frac{3}{7}=4\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=4\frac{4}{7}.$

Вы знаете, что, чтобы найти разность двух чисел, можно к уменьшаемому прибавить число противоположное вычитаемому:

3) $-7\frac{1}{15}-5\frac{3}{10}=-7\frac{2}{30}+\left(-5\frac{9}{30}\right)=-12\frac{11}{30};$

4) $\frac{12}{23}-\left(\frac{-5}{46}\right)=\frac{24}{46}+\frac{5}{46}=\frac{29}{46}.$

Вспомните:
Каковы правила нахождения суммы чисел одинакового и разного знака?

Поэтому выражение $a+b-c-d$ можно рассматривать в виде суммы: $a+b+(-c)+(-d)$

ПРИМЕР 3: Вычислите, применив сочетательное свойство сложения: 3,27 – 6,25 – 2,5 + 1,73

Запишем разности в виде суммы, сгруппируем первое слагаемое с четвертым, а второе – с третьим:

$$3,27 - 6,5 - 2,5 + 1,73 = 3,27 + (-6,5) + (-2,5) + 1,73 = (3,27 + 1,73) + (-6,5 + (-2,5)) = 5 + (-9) = -4.$$

Вспомните: Каковы правила вычисления произведения целых и дробных чисел, а также чисел с одинаковыми и разными знаками.

УМНОЖЕНИЕ: Произведение двух чисел одинакового знака положительно, произведение двух чисел разного знака отрицательно.

1) $\frac{-5}{11}\cdot(-3)=\frac{-5\cdot(-3)}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}$

2) $-0,3(8)\cdot 1,2=-\frac{35}{90}\cdot\frac{6}{5}=-\frac{35\cdot 6}{90\cdot 5}=-\frac{7}{15}$

Переместительное свойство умножения:	**При перемене мест множителей произведение не меняется:** ***a · b = b · a***

ПРИМЕР 4: Проверьте выполнимость переместительного свойства умножения:

$$\frac{-6}{5}\cdot\frac{1}{12}=\frac{-6\cdot 1}{5\cdot 12}=\frac{-1}{10}; \qquad \frac{1}{12}\cdot\frac{-6}{5}=\frac{1\cdot(-6)}{12\cdot 5}=\frac{-1}{10}.$$

Сочетательное свойство умножения	**Чтобы умножить произведение двух чисел на третье, можно умножить первое на произведение второго и третьего множителей:** ***a · b · c = (a · b) · c = a · (b · c)***

ПРИМЕР 5: Найдите произведение, применив сочетательное свойство: 1,8 · 0,25 · 64 · 0,5 Произведение этих чисел можно найти, сначала умножив первое число на четвертое, второе – на третье:
1,8 · 0,25 · 64 · 0,5 = (1,8 · 0,5) · (0,25 · 64) = 0,9 · 16 = 14,4.

Распределительное свойство.

К сложению: **Чтобы умножить число на сумму чисел, можно сначала это число умножить на каждое слагаемое, а затем сложить полученные произведения:** ***a(b + c) = ab + ac***

К вычитанию: **Чтобы умножить число на разность двух чисел, можно сначала умножить это число на уменьшаемое и вычитаемое, а затем вычесть из первого произведения второе:** ***a(b – c) = ab – ac***

ПРИМЕР 6: Применив распределительное свойство умножения, вычислите: $25 \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\right)$

Раскроем скобки, умножая 25 на уменьшаемое и вычитаемое:

$$25 \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\right) = 25 \cdot \frac{3}{10} - 25 \cdot \frac{2}{5} = 7{,}5 - 10 = -2{,}5.$$

ДЕЛЕНИЕ: При делении рациональных чисел надо делимое умножить на обратное делителя.

ПРИМЕР 7:

1) $-3{,}1 : \left(-6\frac{1}{5}\right) = -\frac{31}{10} : \left(-\frac{31}{5}\right) = -\frac{31}{10} \cdot \left(-\frac{5}{31}\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5\,;$

2) $-9,(2) : 1,7(8) = -9\frac{2}{9} : 1\frac{71}{90} = -\frac{83}{9} : \frac{161}{90} = -\frac{83}{9} \cdot \frac{90}{161} = -\frac{830}{161} = -5\frac{25}{161}.$

При выполнении действий над рациональными числами соблюдаются последовательность выполнения действий.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из следующих утверждений верны?

a) сумма произвольных двух натуральных чисел есть натуральное число;

b) разность произвольных двух натуральных чисел есть натуральное число;

c) сумма произвольных целого и натурального чисел есть натуральное число;

d) частное произвольных двух целых чисел есть целое число;

e) квадрат любого числа положителен.

2. Выполните действия. Какому множеству чисел принадлежит вычисленный результат?

a) $7{,}3 + (-22{,}8)$	b) $\frac{3}{4} - (-0{,}25)$	c) $-\frac{21}{44} + \frac{7}{22}$
d) $-12{,}4 \cdot 0{,}2$	e) $\frac{5}{6} : \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$	f) $-4{,}6 + \left(-9{,}2 - 4\frac{2}{3}\right)$
g) $1\frac{3}{11} : \frac{-1}{11}$	h) $1{,}5 \cdot \frac{8}{9} : \frac{-5}{12}$	k) $-3\frac{1}{2} + 4\frac{4}{5} - 6{,}7$

ОБРАЗЕЦ: h) Сначала обратим десятичную дробь в обыкновенную, затем выполним умножение и деление дробей.

$$1{,}5 \cdot \frac{8}{9} : \frac{-5}{12} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{5} = -\frac{3 \cdot 8 \cdot 12}{2 \cdot 9 \cdot 5} = -\frac{8 \cdot 2}{5} = -\frac{16}{5} = -3\frac{1}{5} = -3{,}2$$

Полученное –3,2 есть рациональное число.

Как по-вашему, для чего применяют свойства сложения и умножения?

Вспомните: В какой последовательности выполняются арифметические действия?

Если вы не согласны с каким-то утверждением, то приведите пример отрицающий это утверждение.

3. В следующих выражениях сначала определите последовательность действий, затем выясните, каким из чисел (натуральным, целым или дробным) является значение этого выражения.

a) $0,3 \cdot 3,5 - 3,7$

b) $\frac{3}{4} : 9 + (0,732 - 0,75) : 0,009$

c) $2\frac{4}{13} : \left(-\frac{15}{26}\right) - 3,75 \cdot 2$

d) $481,92 : 12 - 25,16$

e) $2\frac{11}{17} - 2\frac{4}{15} - (13,7 \cdot 1,5 - 21,55)$

f) $\left(\frac{3}{20} + 4\frac{1}{15}\right) + \frac{25}{42} \cdot 2,1$

4. Вычислите значение выражения при заданных значениях переменных:

a) $\frac{0,7m - 1,3}{0,29 - 0,18n}$, при $m = 2,1$; $n = 3,5$;

b) $\frac{x^2 + 1,37}{3,1y - 0,17}$, при $x = 5,3$; $y = 0,7$.

5. Найдите:

a) 10% от $0,(12)$;

b) число, $1,(5)$ частей которого равны 25;

c) $3,(1)$ частей от 45;

d) число, 75% которого равны $10,2(7)$.

6. Аделя к числу, $0,(5)$ частей которого равны 50, прибавила число, 15% которого равны $2,1(2)$. Какой результат она получила?

7. Ответьте на следующие вопросы:

a) Сколько месяцев составит 0,(6) частей от 1 года?

b) Сколько составит 0,0(5) частей от 180 кг?

c) Чему равно 0,4(35) частей числа 660?

d) Чему равно число, 3,(5) частей которого есть 4,(12)?

8. a) Запишите какое-нибудь рациональное число, расположенное между $\frac{1}{6}$ и $\frac{5}{12}$.

b) Запишите какое-нибудь рациональное число, расположенное между вышенайденным числом и $\frac{5}{12}$.

c) Как по-вашему, как долго можно повторить это действие и сколько рациональных чисел расположено между двумя произвольно выбранными рациональными числами?

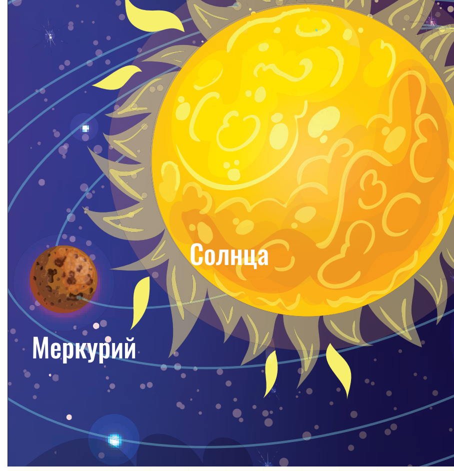
9. Известно, что в молоке содержится 3,2% жиров, 2,5% белков, 4,7% углеводов. Сколько грамм каждого вещества содержится в 1 стакане молока (200 г)?

10. Исследование: Исследуйте, что, если любое простое число больше 5 увеличить или уменьшить на 1 единицу, то полученное число будет кратно 6.

1) Проверьте это утверждение на примерах.

2) Обсудите, почему это утверждение верно.

3) Постарайтесь обосновать это утверждение.



1 миля ≈ 1,6 км

11. Расстояние от планеты Меркурий до Солнца приблизительно равно 36 000 000 миль. Это расстояние в 11 800 раз больше диаметра Меркурия. Определите приблизительно диаметр Меркурия и найдите его радиус.

12. Составьте алгоритм вычисления следующих выражений. На какие правила вы опираетесь при определении порядка действий?

a) $\dfrac{8}{1+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}}$; b) $2-\dfrac{1}{-2+\dfrac{1}{3}}+\dfrac{9}{-\dfrac{7}{4}:\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}}$; c) $\dfrac{\left(\dfrac{5}{6}+1\dfrac{1}{2}\right):\dfrac{7}{12}}{-\dfrac{5}{9}+\left(11-7\dfrac{5}{18}\right)}$;

d) $\dfrac{(2{,}73+4{,}81+3{,}27-2{,}81):\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{14}{15}\right)}{25\cdot37\cdot0{,}4}$;

e) $3:\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{2}\left(\left(-\dfrac{7}{6}\right)\cdot\dfrac{3}{14}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)$.

13. Найдите значения выражений и в пустые клетки впишите соответствующие знаки «>», «<» или «=».

a) $\dfrac{7}{4}:\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{5}\right)\ \square\ \left(\dfrac{7}{4}:\dfrac{4}{5}\right)\cdot\dfrac{2}{5}$; b) $\dfrac{2}{-3+\dfrac{1}{5}}\ \square\ 1\dfrac{4}{7}$.

14. Найдите значения выражений:

a) $((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\dfrac{2}{5}+1\dfrac{11}{21}$;

b) $\left(1\dfrac{2}{5}+3{,}5:1\dfrac{1}{4}\right):2\dfrac{2}{5}+3{,}4:2\dfrac{1}{8}-0{,}35$;

c) $\left(\dfrac{3{,}75+2\dfrac{1}{2}}{2\dfrac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\dfrac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}$; d) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

15. Преобразуйте периодические десятичные дроби в обыкновенные и вычислите значения выражений:

a) $\dfrac{\left(0{,}666...-\dfrac{1}{3}\right)\cdot0{,}25}{0{,}12333...:0{,}0925}+12{,}5\cdot0{,}64$;

b) $\dfrac{0{,}8333...-0{,}4(6)}{1\dfrac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\dfrac{3}{4}-0{,}41(6)}{0{,}59}$.

Проверьте себя

Обобщающие задания

1. У Нармины больше книг, чем у Севиль, но меньше, чем у Ахмеда. У Севиль 12 книг, что составляет 60% числа книг Ахмеда. Какое наименьшее и какое наибольшее количество книг может быть у Нармины?

2. Выпишите несколько чисел, расположенных между $9,(5)$ и $9,554$.

3. Даны числа $a=5,(1)$ и $b=2,12589$. Между какими двумя натуральными числами расположено число $a+b$?

1) Определите более точные границы числа $a+b$ (это могут быть десятичные дроби), предварительно округляя сумму $a+b$ с точностью до **a)** $0,1$; **b)** $0,01$; **c)** $0,001$

2) Округлив числа a и b с точностью до 0,0001, определите целые границы числа $a-b$.

3) Запишите несколько границ десятичными дробями и ближайшие целые границы числа $b-a$.

4. На числовой оси отмечены точки, A, B и D соответствующие числам m, n и k.

Известно, что $m > n$ и $k > m$. Запишите числа, отвечающие точкам A, B и D на числовой оси. В соответствии с рисунком запишите двойное неравенство, используя числа m, n, k и знак «<». Как можно записать это двойное неравенство, применяя знак «>»?

5. Первый автомобиль за x часов проехал 700 км, второй – за y часов 630 км. Скорость какого автомобиля больше, если

a) $x = 12,5$, $y = 10,5$; **b)** $x = y = 14$?

6. Освобожденная во время II Карабахской войны нашими доблестными воинами от вражеской оккупации Шушинская крепость воздвигнута на территории, изобилующей множественными возвышенностями и обрывами, с западной стороны окруженной горным плато в форме амфитеатра. Максимальная высота горного плато составляет 1600 м над уровнем Мирового океана, минимальная высота – 1300 м. Запишите для высоты h остальных частей плато двойное неравенство и определите целые решения этого неравенства.

Проверьте себя

7. Вычислите значения выражений:

a) $-6,965 + 23,3$; **b)** $6,2 \cdot (-1,33)$; **c)** $53,4 : (-15)$;

d) $99 - 9,904$; **e)** $-0,016 \cdot 0,25$; **f)** $75 : 1,25$.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

РАЗДЕЛ 3

АКСИОМА И ТЕОРЕМА

Математика изобилует формулами, правилами, предложениями, определениями. Некоторые из них принимаются без доказательства. Но есть и такие, которые нужно доказывать.

Математические утверждения бывают двух видов:

- Принимаемые без доказательства – **аксиомы**
- Принимаемые с доказательствами – **теоремы**

Математические утверждения

Без доказательства

Утверждения, принимаемые без доказательства, называются **аксиомами**

ОБРАЗЕЦ 1:
Через 2 точки можно провести только одну прямую

ОБРАЗЕЦ 2:
Из 3-х точек, лежащих на прямой, одна лежит между двумя другими.

С доказательствами

Утверждения, нуждающиеся в доказательстве, называются **теоремами**.

ТЕОРЕМА
Утверждение, выдвигаемое на основе некоторых условий.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА
Получается, если поменять местами утверждение и условия.

1 Перпендикуляр и наклонная

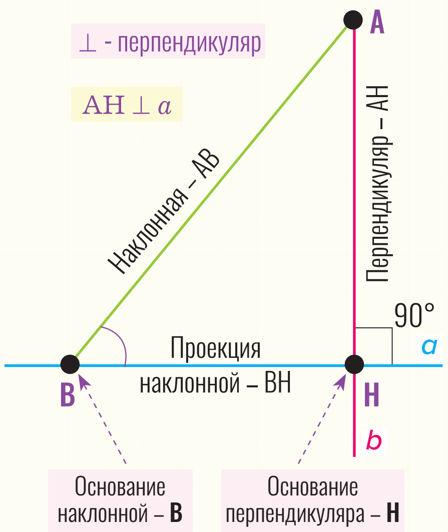


РИСУНОК 1

При пересечении двух прямых a и b образуются четыре угла с вершиной в точке пересечения этих прямых. Если один из этих углов равен 90°, то эти прямые будут перпендикулярными (рисунок 1).

Перпендикулярность обозначается значком «⊥» и записывается: $a \perp b$.

Дана прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой (рисунок 1). Проведём через точку A прямую AH пересекающую прямую a под углом 90° в точке H. В этом случае отрезок AH называется перпендикуляром. Точка H есть основание перпендикуляра. Согласно рисунку 1 $AH \perp a$.

Длина отрезка AH называется расстоянием от точки A до прямой a.

Отрезок, соединяющий точку A с любой точкой прямой a, отличной от точки **H**, **называется наклонной**. Точка **B** пересечения этих двух прямых называется основанием наклонной. Угол ∠ABH – **угол наклона**. Из точки к прямой можно провести бесконечное число наклонных.

Отрезок, соединяющий основание наклонной (точка B) с основанием перпендикуляра (точка H), называется проекцией **наклонной на прямую *a***. На рисунке 1 отрезок BH является проекцией наклонной AB на прямую ***a***.

Длина любой наклонной из одной и той же точки к прямой ***a*** больше длины перпендикуляра: **AB>AH**

Доказательство смотреть в QR

ТЕОРЕМА: Из заданной точки к данной прямой можно провести единственную прямую.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите нижеуказанное на рисунке 2:

a) наклонные;
b) основания наклонных;
c) перпендикуляры;
d) основания перпендикуляров;
e) проекции наклонных;
f) расстояние от точки A до прямой a;
g) углы наклона наклонных.

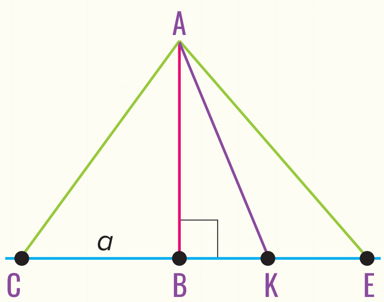


РИСУНОК 2

2. Начертите прямую *m* и отметьте точку M вне её. Проведите из точки M перпендикуляр и наклонные к прямой *m*.

a) Длина какого из этих отрезков считается расстоянием от точки M до прямой *m*?

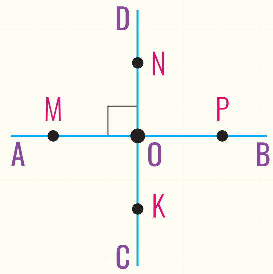
b) Как по-вашему, какая наклонная имеет наибольшую длину?

3. Выпишите по рисунку 3 следующее:

a) две пары взаимно перпендикулярных луча;

b) четыре пары взаимно перпендикулярных отрезка;

c) три пары отрезка и луча, перпендикулярных между собой.



Образец:

a) лучи MB и KD; $MB \perp KD$

b) отрезки OM и KN; $OM \perp KN$

c) луч OB и отрезок MP; $OB \perp MP$

РИСУНОК 3

4. Прямая *a* пересекает стороны угла A в точках B и C. Может ли каждая из прямых AB и AC быть перпендикулярной прямой *a*? Почему?

5. Нарисуйте a) остроугольный; b) прямоугольный; c) тупоугольный треугольники. Покажите на рисунке отрезки, длины которых являются расстояниями от каждой вершины до противолежащей стороны в каждом треугольнике.

6. Ширина прямоугольника 3 см 4 мм, длина – в 3 раза больше. Найдите расстояние от каждой вершины до противолежащей стороны.

Проверьте себя

7. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 12 см, 15 см и 16,2 см. Найдите расстояние от каждой вершины до рёбер.

8. Из точки вне прямой проведены к ней две конгруэнтных наклонных. Длина проекции наклонной равна 8 см. Определите расстояние между основаниями наклонных.

9. Точки M и N находятся соответственно на расстоянии 6 см и 9 см от прямой *a*, причём прямые MN и *a* взаимноперпендикулярны.

a) Найдите длину отрезка MN.

b) Чему равно расстояние от середины отрезка до прямой *a*? Сколько случаев необходимо рассмотреть?

10. Из точки K к прямой *a* проведены две наклонные *c* и *d* под углом, соответственно, 60° и 30°. Каково взаимное расположение этих наклонных?

11. Из точки D к прямой *n* проведены три секущие. Докажите, что хотя бы две из них не перпендикулярны прямой *n*.

12. Практическая работа: При проведении строительных работ для проведения перпендикулярных линий на местности используют прибор «эккер» (рисунок 4). Объясните, как с помощью этого прибора можно построить прямой угол.

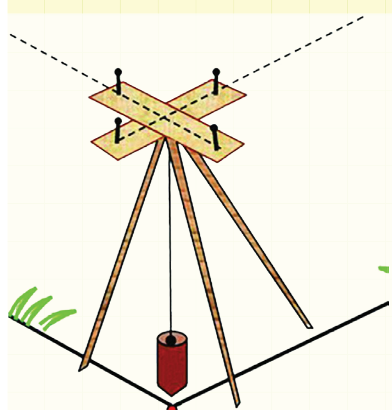


РИСУНОК 4

РАЗДЕЛ 3

2 Серединный перпендикуляр к отрезку

«**Построение**» – это одно из основных неопределяемых понятий геометрии.

Задача на построение – это предложение построить какую-нибудь геометрическую фигуру при определённых условиях заданными инструментами.

С помощью циркуля и линейки построим сначала отрезок, конгруэнтный данному, затем серединный перпендикуляр. Серединный перпендикуляр – это прямая, проходящая через середину **отрезка перпендикулярно** ему.

1. Построение отрезка, конгруэнтного данному отрезку AB

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕИЯ:

РИСУНОК 5

Пусть дан отрезок AB (рисунок 5).

РИСУНОК 6

Шаг 1:
С помощью линейки построим некоторую прямую MN и отметим на ней точку P (рисунок 6).

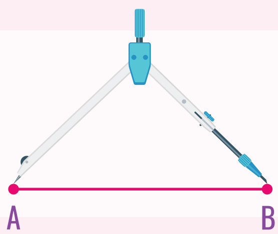


РИСУНОК 7

Шаг 2:
Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между его концами соответствовало длине отрезка AB (рисунок 7).

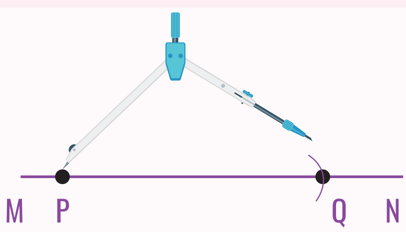


РИСУНОК 8

Шаг 3:
Не изменяя расстояние между концами циркуля, установите иглу циркуля на точку P и проведите дугу, пересекающую прямую MN в точке Q (рисунок 8).
Полученный отрезок PQ есть отрезок, конгруэнтный отрезку AB:

$PQ \cong AB$.

Отметим середину отрезка PQ и построим перпендикулярную к отрезку PQ прямую, проходящую через эту середину.

2. ПОСТРОЕНИЕ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА

Шаг 1:
Поместим иглу циркуля в точке P и проведём циркулем полуокружность радиусом большим, чем половина длины отрезка PQ, так чтобы она пересекла отрезок PQ (рисунок 9).

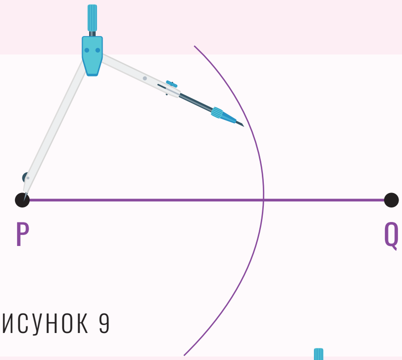


РИСУНОК 9

Шаг 2:
Не меняя раствор циркуля проведём такую же полуокружность, поместив иглу циркуля в точку Q (рисунок 10).

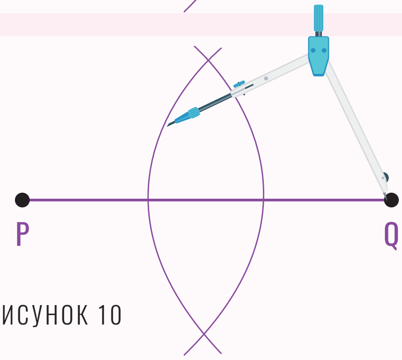


РИСУНОК 10

Шаг 3:
Через точки C и D пересечения этих полуокружностей по разные стороны от отрезка PQ проведём прямую линию (рисунок 11).

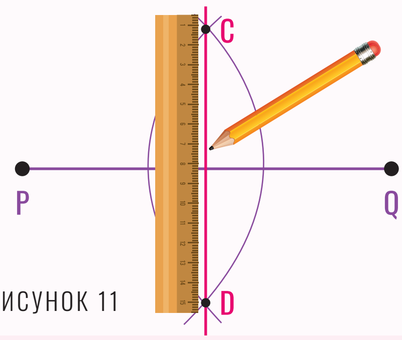


РИСУНОК 11

Полученная прямая CD является серединным перпендикуляром к отрезку PQ (рисунок 12).

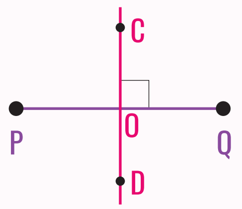


РИСУНОК 12

УПРАЖНЕНИЯ

1. a) Проведите горизонтальный отрезок какой-либо длины и постройте серединный перпендикуляр к нему.

b) Проведите вертикальный отрезок какой-либо длины и постройте серединный перпендикуляр к нему.

c) Проведите наклонный отрезок какой-либо длины и постройте серединный перпендикуляр к нему.

2. Определите середину сторон следующих фигур:

a) треугольника ABC **b)** прямоугольника MNPK

c) трапеции ABCD

РАЗДЕЛ 3

3 Центральная симметрия

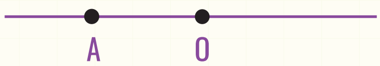


РИСУНОК 13

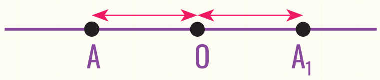


РИСУНОК 14

Изучим, как построить точку, симметричную данной точке относительно некоторой точки. Пусть даны точки A и O. Соединим их прямой линией (рисунок 13).

Построим окружность радиусом равным длине отрезка OA. Точку пересечения этой окружности и прямой OA обозначим A_1. Точки A и A_1 симметричны относительно точки O.

Точка A_1 на прямой, проходящей через точки 0 и A, для которой выполняется условие $OA_1 \cong OA$, **называется точкой, симметричной** точке A относительно точки O.

Точка O называется **центром симметрии**. Она симметрична сама себе.

Рассмотрим 2 случая симметрии фигур относительно точки.

I. ЦЕНТРАЛЬНОСИММЕТРИЧНЫЕ ФИГУРЫ

Если точка, симметричная относительно точки O каждой точке фигуры, принадлежит этой же фигуре, то фигура называется **центральносимметричной**. Точка O является **центром симметрии фигуры**.

ПРИМЕР 1: Постройте фигуру, симметричную окружности относительно центра 0 этой окружности.

ПОСТРОЕНИЕ: Построим точки, симметричные данным точкам данной окружности относительно центра O. Расстояние от точки A на окружности до центра O есть радиус окружности. Если на прямой OA в противоположную сторону от точки O отложить отрезок длины OA получим радиус OA_1. Значит, точка A_1 лежит на окружности. Точно также точка B_1, симметричная точке B, точка C_1, симметричная точке C, и другие точки принадлежат данной окружности (рисунок 15). Таким образом, при симметрии относительно центра окружности O окружность отображается на себя.

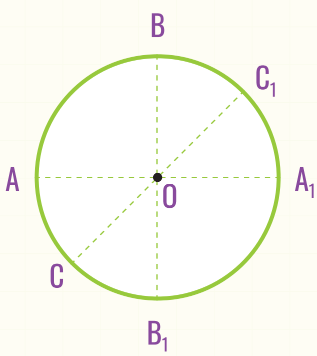


РИСУНОК 15

ЗАМЕЧАНИЕ: Центральносимметричные фигуры при симметрии относительно центра O отображаются сами на себя (рисунок 16).

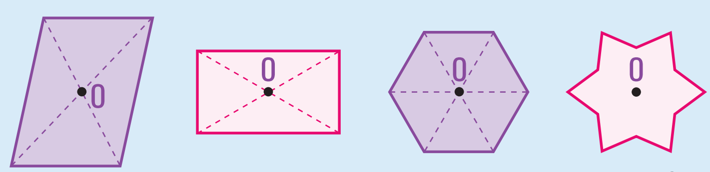


РИСУНОК 16

II. ФИГУРЫ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРОЙ ТОЧКИ

При построении фигуры, симметричной данной фигуре относительно некоторой точки, получается фигура, конгруэнтная данной фигуре.

ПРИМЕР 2: Постройте фигуру, симметричную треугольнику ABC относительно точки O (рисунок 17).

ПОСТРОЕНИЕ: Для построения фигуры, симметричной данному треугольнику относительно точки O, необходимо построить точки, симметричные вершинам данного треугольника относительно точки O, и последовательно соединить полученные точки отрезками. Полученная фигура $A_1B_1C_1$ тоже треугольник, причём $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

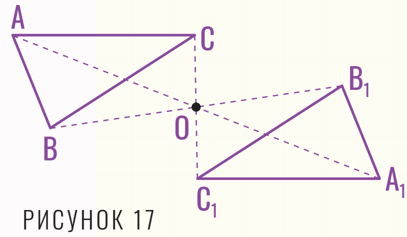
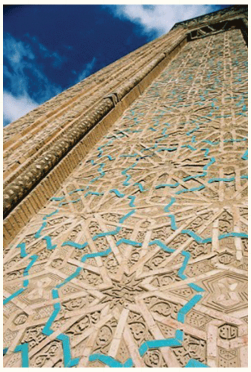


РИСУНОК 17

СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ:

1. При центральной симметрии расстояния сохраняются;
2. При центральной симметрии точка отображается в точку, прямая – в прямую, луч – в луч, отрезок – в конгруэнтный ему отрезок;
3. При центральной симметрии фигура отображается в конгруэнтную ей фигуру.

Симметричные фигуры часто встречаются в искусстве, технике, обиходе. Узоры на коврах, настенных обоях, тканях, исторических памятниках в основном являются центральносимметричными фигурами.


УСЫПАЛЬНИЦЫ МОМИНЕ ХАТУН

УПРАЖНЕНИЯ

1. a) Отметьте точки A, B, C, D, M на плоскости. Постройте точки, симметричные этим точкам относительно точки M.

b) Начертите на плоскости прямую AB, луч MN и отрезок PK и отметьте точку O. Постройте фигуры, симметричные этим фигурам относительно точки O. Расскажите о свойствах этих фигур.

2. Прямая c пересекает отрезок AB в точке O, причём $OA \neq OB$. Симметричны ли точки A и B относительно точки O? Почему?

3. Обладают ли следующие фигуры центром симметрии?
a) луч; **b)** прямая; **c)** две пересекающиеся прямые;
d) квадрат; **e)** треугольник.
Если обладают, то покажите местоположение их центра симметрии.

4. Отрезки AB и A_1B_1 симметричны относительно некоторой точки O (рисунок 18). Покажите, где находится точка O и отметьте точку, симметричную точке P при этой симметрии.

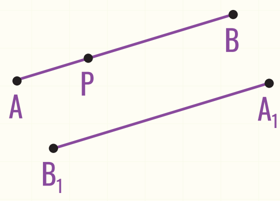


РИСУНОК 18

5. Постройте фигуры, симметричные данным фигурам относительно точки O (рисунок 19). Что вы можете сказать о полученных фигурах и об их центрах симметрии?

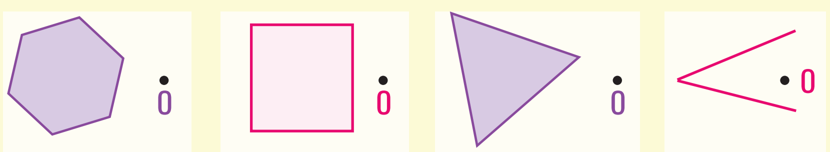


РИСУНОК 19

РАЗДЕЛ 3

4 Углы, полученные при пересечении двух прямых третьей

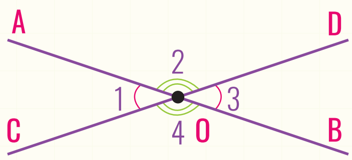


РИСУНОК 20

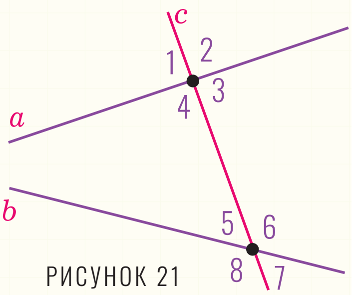


РИСУНОК 21

Начертим две пересекающиеся прямые AB и CD. Известно, что в этом случае образуются четыре угла с вершиной в точке пересечения этих прямых и со сторонами, являющимися лучами, лежащими на этих прямых и исходящими из их точки пересечения (рисунок 20).
Обозначим $\angle AOC = \angle 1$, $\angle AOD = \angle 2$, $\angle BOD = \angle 3$, $\angle BOC = \angle 4$.

Известно, что

$\angle 1 \cong \angle 3$ и $\angle 2 \cong \angle 4$ (почему?),

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = 180°$ (почему?).

А теперь рассмотрим углы образованные при пересечении прямой c с двумя пересекающимися прямыми a и b. Перенумеруем углы, полученные в этом случае (рисунок 21).

Углы, полученные при пересечении двух пересекающихся прямых третьей, именуются в зависимости от расположения относительно этих прямых следующим образом:

Внутренние накрест лежащие углы	Внешние накрест лежащие углы	Внутренние односторонние углы	Внешние односторонние углы	Соответственные углы
$\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 5$	$\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$	$\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$	$\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 1$ и $\angle 8$	$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Начертите произвольные прямые m и n. Проведите прямую κ, пересекающую эти прямые, обозначьте образовавшиеся углы и назовите их.

2. Постарайтесь объяснить нижеследующие утверждения при условии $\angle 4 \cong \angle 6$ на рисунке 21:

a) остальные накрест лежащие углы тоже равны;

b) соответственные углы равны;

c) сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

3. Объясните следующие утверждения, если для внутренних односторонних углов на рисунке 21 выполняется условие $\angle 3 + \angle 6 = 180°$:

a) $\angle 2 + \angle 7 = 180°$;

b) внутренние накрест лежащие углы равны;

c) соответственные углы равны.

4. Назовите вид углов m и n на рисунке 22 (a, b, b).

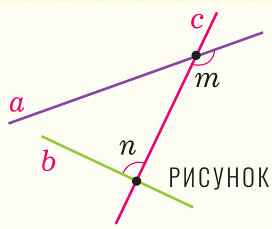


РИСУНОК 22,a

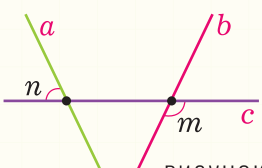


РИСУНОК 22,b

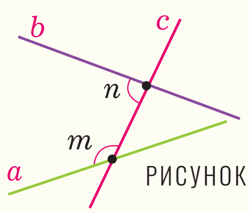


РИСУНОК 22,c

5. Если какая угодно пара соответственных углов, полученных при пересечении двух пересекающихся прямых третьей, состоит из равных углов, то исследуйте выполнимость следующих утверждений:

a) остальные пары соответственных углов состоят из равных углов;

b) внутренние накрест лежащие углы равны;

c) сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

6. Пусть прямые AB и MN пересекаются. Укажите образованные при пересечении прямой MN с двумя прямыми AM и BN (рисунок 23):

a) внутренние накрест лежащие;

b) внешние накрест лежащие;

c) внутренние односторонние углы.

7. Пять прямых пересекаются в одной точке (рисунок 24). Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$.

8. Пять прямых попарно пересекаются (рисунок 25). Сумма всех углов при вершинах во внешней области пятиугольника равна 1260°. Найти $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$.

Указание: Учтите, что сумма всех углов при одной вершине равна 360°.

9. Четыре прямые пересекаются так, как показано на рисунке 26. $\angle 2 + \angle 3 = 88°$ Найдите $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$.

10. Три пересекающиеся прямые a, b и c образуют треугольник. Найти сумму всех углов между прямыми. В каком случае даже при попарном пересечении этих прямых треугольник всё же не образуется?

11. Прямые m, n и κ попарно пересекаются (рисунок 27).

a) Выпишите пары внутренних и внешних односторонних углов, образованных прямыми m, n и секущей κ.

b) Выпишите пары внутренних и внешних накрест лежащих углов, образованных прямыми κ, n и секущей m.

c) Выпишите пары соответственных углов, образованных прямыми m, κ и секущей n.

12. Прямая a является секущей прямых b и c (рисунок 28).

a) Определите градусную меру $\angle 2$ и $\angle 4$, если $\angle 1 = 56°$, $\angle 3 = 122°$.

b) Вычислите $\angle 2 + \angle 3$, если $\angle 1 + \angle 4 = 96°$.

c) Вычислите $\angle 3 - \angle 1$, если $\angle 2 - \angle 4 = 32°$.

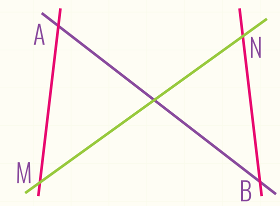


РИСУНОК 23

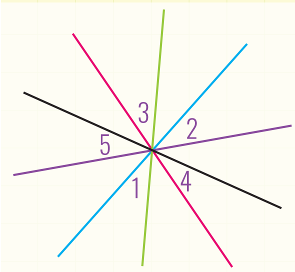


РИСУНОК 24

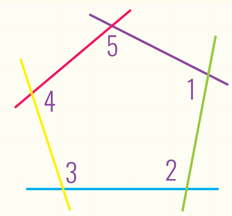


РИСУНОК 25

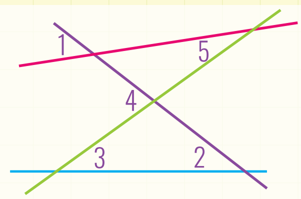


РИСУНОК 26

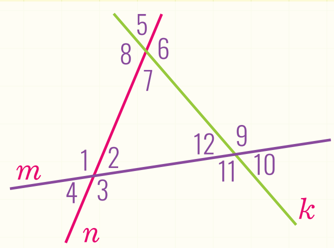


РИСУНОК 27

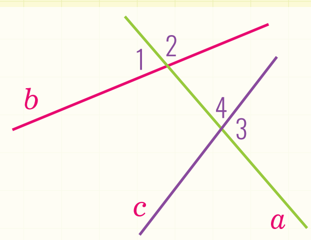


РИСУНОК 28

РАЗДЕЛ 3

5 Признак параллельности прямых

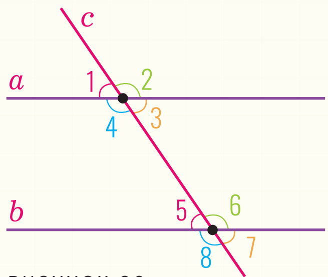


РИСУНОК 29

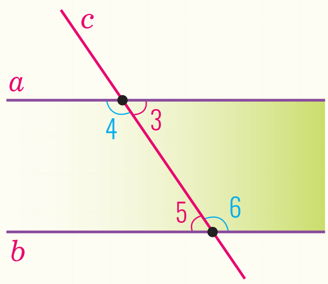


РИСУНОК 30

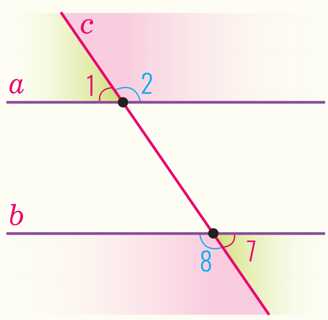


РИСУНОК 31

В предыдущей теме расположение двух прямых выбиралось произвольным.

Исследуем свойства внутренних и внешних накрест лежащих, внутренних и внешних односторонних соответственных углов, образованных в частном случае при пересечении прямой двух параллельных прямых, а также признаки параллельности прямых.

1. СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ

Соответственные углы, образованные двумя параллельными прямыми и их секущей, конгруэнтны.

На рисунке 29 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ и c секущая. Тогда: $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$ пары соответственных углов. Значит, $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 2 \cong \angle 6$, $\angle 4 \cong \angle 8$, $\angle 3 \cong \angle 7$.

Верно и обратное утверждение: Если соответственные углы, образованные двумя прямыми и секущей конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.

2. ВНУТРЕННИЕ НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ

Внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, конгруэнтны.

На рисунке 30 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ и c секущая. $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$ – пары внутренних накрест лежащих углов. Значит, $\angle 4 \cong \angle 6$, $\angle 3 \cong \angle 5$.

Верно и обратное утверждение: Если внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя прямыми и секущей, конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.

3. ВНЕШНИЕ НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ

Внешние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, конгруэнтны.

На рисунке 31 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ и c секущая. $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ пары внешних накрест лежащих углов. И значит, $\angle 1 \cong \angle 7$, $\angle 2 \cong \angle 8$.

Верно и обратное утверждение: Если внешние накрест лежащие углы, образованные двумя прямыми и секущей, конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.

4. ВНУТРЕННИЕ ОДНОСТОРОННИЕ УГЛЫ

Сумма внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, равна 180°.

На рисунке $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ и c секущая. $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ пары внутренних односторонних углов. Значит, $\angle 3+\angle 6=180°$, $\angle 4+\angle 5=180°$.

Верно и обратное утверждение: Если сумма двух внутренних односторонних углов, образованных двумя прямыми и их секущей, равна 180°, то эти две прямые параллельны.

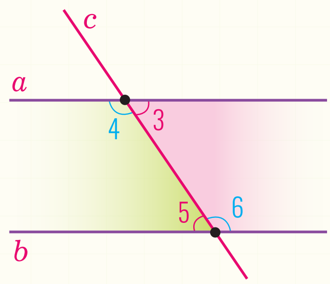


РИСУНОК 32

5. ВНЕШНИЕ ОДНОСТОРОННИЕ УГЛЫ

Сумма внешних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, равна 180°.

На рисунке 33 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ и c секущая. $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ внешние односторонние углы. Значит, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$.

Верно и обратное утверждение: Если сумма двух внешних односторонних углов, образованных двумя прямыми и их секущей, равна 180°, то эти две прямые параллельны.

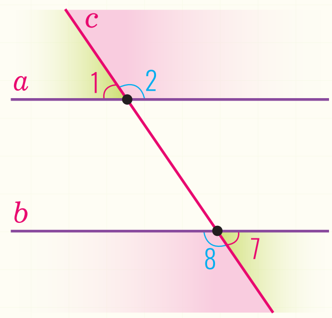


РИСУНОК 33

ПРИМЕР: 1) Пусть $a \| b$ и c секущая. Один из внутренних накрест лежащих углов равен $35°$. Определите градусные меры соответственных углов, образованных этими прямыми.

2) Прямые a и b пересекаются прямой c. Известно, что образованные при этом внешние односторонние углы равны $123°$ и $57°$. Определите взаимное расположение прямых a и b.

РЕШЕНИЕ:

1) По условию $a \| b$. Тогда по признаку параллельности прямых второй из внутренних накрест лежащих углов тоже равен $35°$. Так как сумма внутренних односторонних углов равна $180°$, а один из них равен $35°$, то другой угол равен $180°-35°=145°$. Таким образом, соответственные углы равны $145°$ и $35°$.

2) По условию внешние односторонние углы, образованные прямыми a и b, равны $123°$ и $57°$. Так как $123°+57°=180°$, то согласно признаку параллельности прямых в силу того, что сумма внешних односторонних углов равна $180°$, то $a \| b$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Практическая работа: Пусть прямые $m \parallel n$ и κ секущая (рисунок 34). Измеряя транспортиром градусные меры образованных углов ответьте на следующие вопросы:

a) Сколько градусов $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$?

b) Сколько градусов $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$?

c) Сколько градусов $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$?

d) $\angle 4 + \angle 5 = ?$; $\angle 3 + \angle 6 = ?$;

e) $\angle 1 + \angle 8 = ?$; $\angle 2 + \angle 7 = ?$

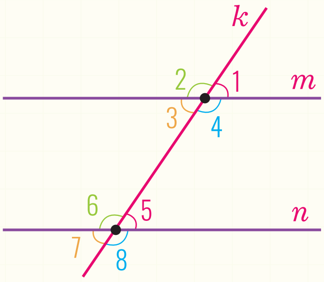


РИСУНОК 34

Сделайте выводы по полученным результатам. Получите ли вы те же результаты если прямые a и b не будут параллельны?

2. Пусть прямая c является секущей прямых a и b (рисунок 35). Обоснуйте утверждение $a \| b$, если

a) $\angle 1 \cong \angle 7$;

b) $\angle 2 = 137°$, $\angle 7 = 43°$;

c) $\angle 4 = 155°$, $\angle 1$ меньше $\angle 6$ на $130°$.

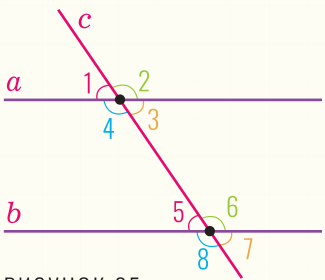


РИСУНОК 35

3. Прямая AB пересекает прямую MN в точке A, а прямую CD в точке B. Можно ли утверждать, что прямые MN и CD параллельны, если

a) $\angle MAB = 45°$, $\angle CBA = 135°$

b) $\angle MAB = 60°$, $\angle CBA = 60°$

c) $\angle MAB = 90°$, $\angle CBA = 90°$

4. Можно ли утверждать, что прямые a и b на рисунках 36 (a, b, c) параллельны? Почему?

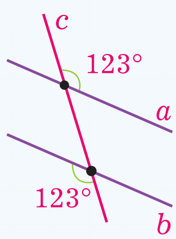


РИСУНОК 36, a

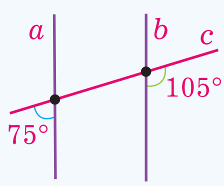


РИСУНОК 36, b

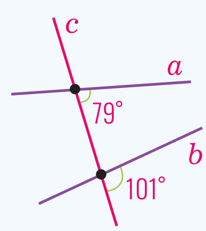


РИСУНОК 36, c

5. На рисунке 37 прямые *a*, *b* и *c* пересекаются прямой *d*. Если $\angle 1 = 132°$, $\angle 2 = 48°$, $\angle 3 = 58°$, то какие из прямых *a*, *b* и *c* параллельны? Обоснуйте ответ.

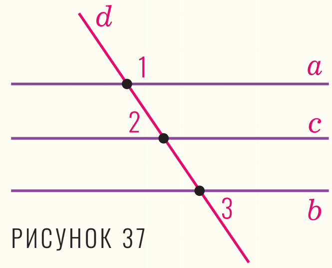


РИСУНОК 37

6. Известно, что на рисунке 38 AB ≅ AC и CE ≅ DE. О параллельности каких прямых можно утверждать? Ответ обоснуйте.

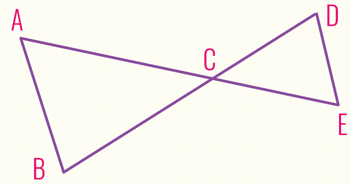


РИСУНОК 38

7. Начертите прямую *a* и точку А, не лежащую на ней. Проведите через точку А прямую параллельно прямой *a*.

8. Через вершину С треугольника АВС проведите прямую параллельно стороне АВ. Сколько можно провести таких прямых? Почему?

9. Прямые *a* и *b* параллельны, прямая *m* пересекает прямую *a*. Определите взаимное расположение прямых *m* и *b*. Обоснуйте ответ.

10. Даны прямые *a*, *b* и *c*, причем $a \parallel b$, *c* секущая (рисунок 39) Вычислите:

a) $\angle 6 = ?$, если $\angle 4 = 50°$;

b) $\angle 5 = ?$ $\angle 7 = ?$, если $\angle 1 = 172°$;

c) $\angle 8 = ?$, если $\angle 5 - \angle 2 = 44°$;

d) $\angle 3 = ?$ и $\angle 8 = ?$, если $\angle 3 = 5 \cdot \angle 8$.

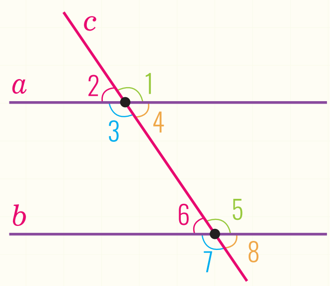


РИСУНОК 39

11. Сумма двух внутренних (внешних) накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 150°. Найдите градусную меру каждого из углов. Чему равна градусная мера углов, смежных с ними?

12. Начертите какие-нибудь две параллельные прямые и секущую к ним. Измерьте транспортиром один из образовавшихся углов. Определите оставшиеся углы. Объясните, по какому свойству вы определяете эти углы.

13. Даны прямые *a*, *b*, *c* и *d* (рисунок 40). $\angle 1 = 103°$, $\angle 6 = 77°$, $\angle 3 = 65°$. Найдите $\angle 6$ и определите взаимное расположение прямых *a*, *b*, *c* и *d*.

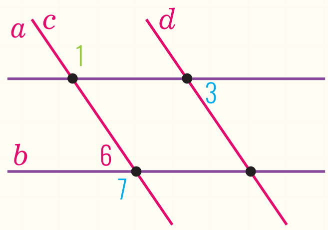


РИСУНОК 40

14. Через вершину А треугольника ABC проведена прямая параллельно стороне ВС. Исследуйте следующее (рисунок 41):

a) Чему равен ∠DAC=?, если ∠BCA = 53°?

b) Чему равен ∠DAB = ?, если ∠ABC = 71°?

c) Чему равен ∠DAC = ?, если ∠CAB = 65° и ∠ABC=45°?

d) Найдите внутренние углы треугольника ABC, если ∠EAB = 69° и ∠DAC = 54°.

15. В параллелограмме ABCD (рисунок 42) ∠A = 115°. Найдите остальные углы параллелограмма. Ответ обоснуйте.

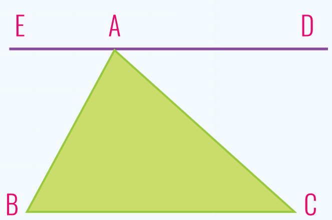


РИСУНОК 41

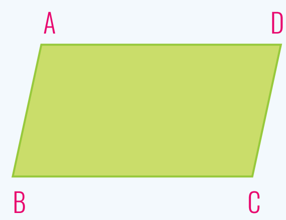


РИСУНОК 42

16. Прямые a и b параллельны, c секущая. По данным рисунков 43 определите образовавшиеся углы.

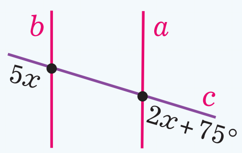


РИСУНОК 43, a

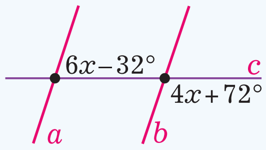


РИСУНОК 43, b

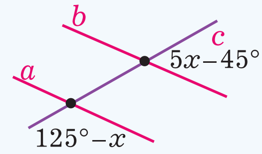


РИСУНОК 43, c

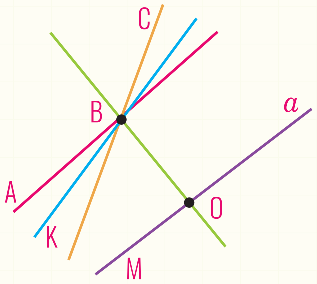


РИСУНОК 44

17. На рисунке 44 из точки, не лежащей на прямой a, проведены несколько прямых. Если ∠ABO = 86,8°, ∠KBO = 63,5°, ∠OBC = 111,4°, ∠MOB = 93,2°, то какие из прямых параллельны прямой a?

18. Отрезки AB и CD равной длины пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что AC∥BD.

19. В трапеции MNKL ∠M = 135° и ∠L = 45°. Выясните, какие из сторон параллельны и какие непараллельны.

20. Выясните взаимное расположение

a) двух прямых перпендикулярных одной и той же прямой;

b) двух прямых параллельных одной и той же прямой;

c) двух прямых, пересекающихся с одной и той же заданной прямой.

Проверьте себя

Запомни: При $a \parallel b$ верны формулы на рисунках 45 (a, b, c):

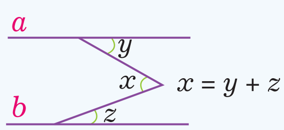


РИСУНОК 45, a

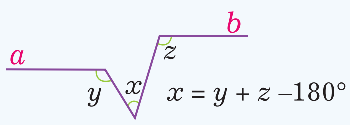


РИСУНОК 45, b

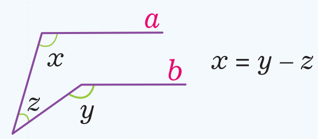


РИСУНОК 45, c

Выполните следующие задания, применяя вышеуказанные формулы:

21. Прямые на рисунках 46 (a, b) параллельны. Найдите x.

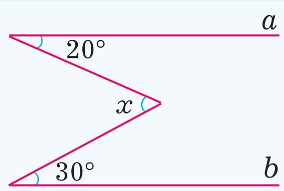


РИСУНОК 46, a

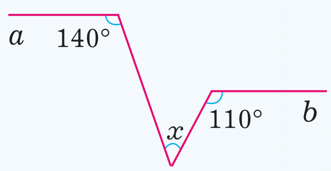


РИСУНОК 46, b

22. На рисунке 47 (a, b, c) $AB \parallel CD$. Найдите неизвестные углы.

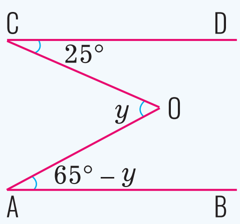


РИСУНОК 47, a

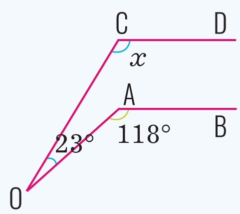


РИСУНОК 47, b

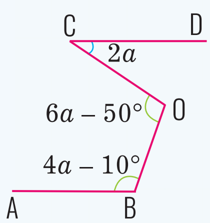


РИСУНОК 47, c

РАЗДЕЛ 3

6 Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

I. УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

Начертим произвольный угол AOB (рисунок 48) и рассмотрим угол MNK (рисунок 49) и угол CED (рисунок 50) со сторонами соответственно параллельными сторонам угла AOB.

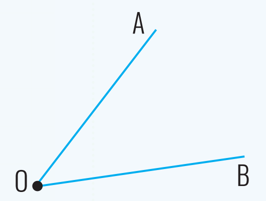


РИСУНОК 48

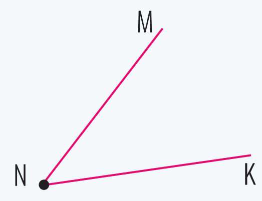


РИСУНОК 49

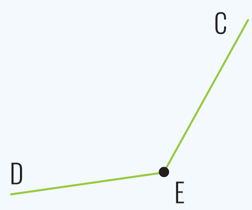


РИСУНОК 50

Стороны углов MNK и CED параллельны соответствующим сторонам угла AOB: OA || NM || EC и OB || NK || ED.

Углы AOB и MNK одноименные, оба острые (рисунок 51).

Углы AOB и CED разноименные, один острый, другой тупой (рисунок 52).

I. Углы $\angle MNK$ и $\angle AOB$ одноименные

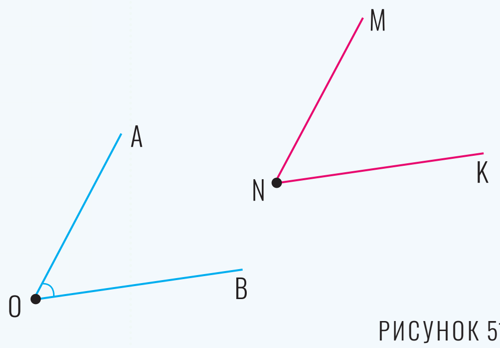


РИСУНОК 51

II. Углы $\angle CED$ и $\angle AOB$ разноименные

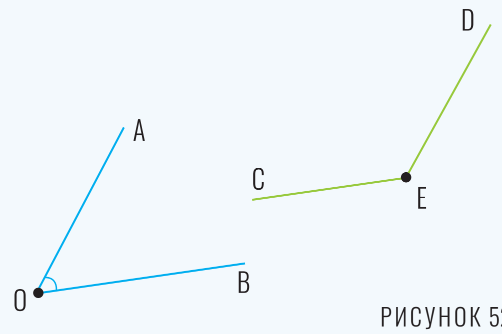


РИСУНОК 52

Углы с соответственно параллельными сторонами конгруэнтны (если они одноименные) или же их сумма равна **180°** (если они разноименные).

II. УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ

Начертим произвольный угол AOB (рисунок 53). Рассмотрим углы MNK (рисунок 53) и CED (рисунок 54) со сторонами соответственно перпендикулярными сторонам угла AOB.

Стороны углов MNK и CED перпендикулярны соответствующим сторонам угла AOB: $OA \perp NM$, $OB \perp NK$ (рисунок 53) и $OA \perp EC$, $OB \perp ED$ (рисунок 54).

I. Углы $\angle MNK$ и $\angle AOB$ разноименные

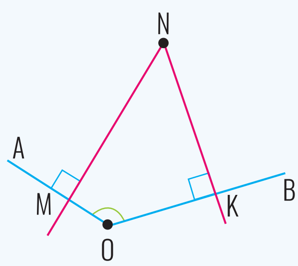


РИСУНОК 53

II. Углы $\angle CED$ и $\angle AOB$ одноименные

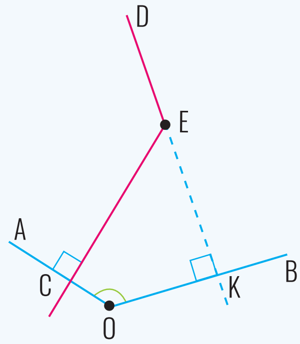


РИСУНОК 54

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или конгруэнтны, или же их сумма равна **180°**.

СВОЙСТВА:

- Одноименные оба тупые или оба острые углы с соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонами конгруэнтны.
- Сумма разноименных (один острый, другой тупой) углов с соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонами равна 180°.
- Если один из двух углов с соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонами равен 90°, то второй угол тоже равен 90°.

Запомни: Если сумма углов 180° или же если углы равные, то это не значит, что их стороны параллельны или перпендикулярны.

ПРИМЕР: Чему равен угол, соответствующие стороны которого параллельны сторонам угла в 163°?

РЕШЕНИЕ: Если углы с соответственно параллельными сторонами одноименные, то их величины равны, если же они разноименные, то их сумма равна 180°. Таким образом, искомый угол либо равен 163°, либо равен $180° - 163° = 17°$.

Ответ: 163° или 17°.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ответьте на следующие вопросы:

a) Будут ли верны утверждения этой темы, если одни стороны двух углов параллельны, а другие – непараллельны? Почему?

b) У каких углов на рисунках 55 стороны параллельны соответствующим сторонам угла AOB?

c) Какими из нижеуказанных могут быть градусные меры двух углов с соответственно перпендикулярными сторонами:
$28°$ и $152°$; $150°$ и $30°$; $42°$ и $148°$; $90°$ и $90°$?

d) На рисунке 56 показаны углы AOB, CED и MKP с соответственно параллельными сторонами. Найдите градусные меры этих углов.

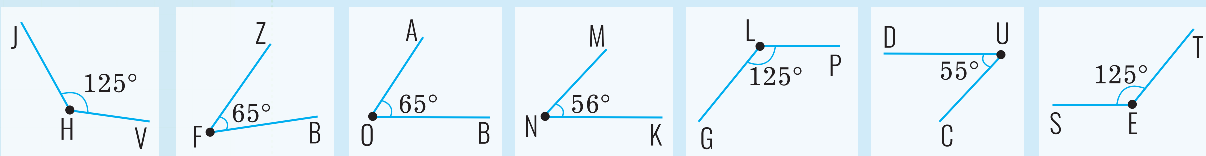


РИСУНОК 55

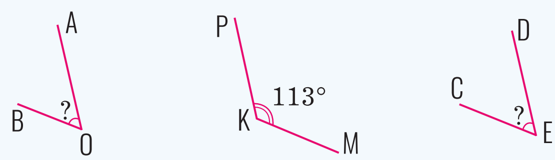


РИСУНОК 56

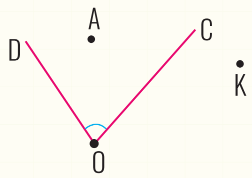


РИСУНОК 57

2. a) Постройте угол с вершиной в точке A и со сторонами соответственно параллельными сторонам угла DOC (рисунок 57).

b) Постройте угол с вершиной в точке K и со сторонами соответственно перпендикулярными сторонам угла DOC (рисунок 57).

3. a) Начертите развернутый угол AOC. Постройте угол BOD, стороны которого параллельны (или перпендикулярны) сторонам OA и OC. Что вы можете сказать об этих углах? Объясните.

b) Начертите прямой угол MNK. Постройте угол PSR со сторонами соответственно параллельными (перпендикулярными) сторонам NM и NK. Определите вид этого угла.

4. a) Начертите угол ABC в $60°$. Постройте угол MNK стороны которого параллельны сторонам угла ABC. Какова может быть мера угла MNK? Почему?

b) Начертите угол MOK в $105°$. Постройте угол CDE, стороны которого перпендикулярны сторонам угла MOK. Найдите градусную меру угла CDE и выясните вид этого угла.

5. Даны углы ABC и DMK (рисунки 58 a, b, c), причем BA || MD и BC || MK. Определите градусные меры этих углов.

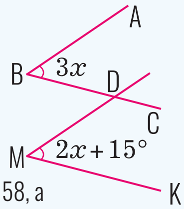


РИСУНОК 58, a

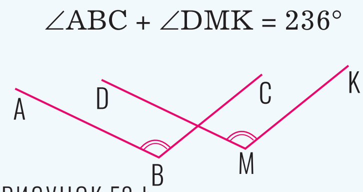


РИСУНОК 58, b

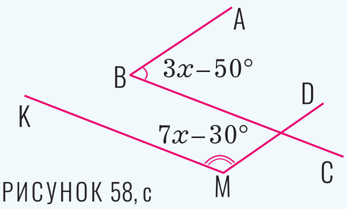


РИСУНОК 58, c

6. Даны углы AOB и MCN, причем OA⊥CN и OB⊥CM. Найти градусную меру этих углов (рисунки 59a, b, c).

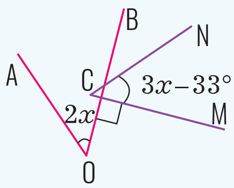


РИСУНОК 59, a

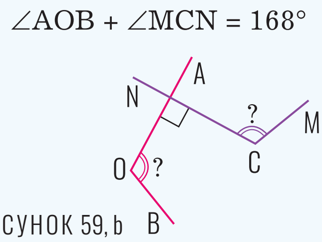


РИСУНОК 59, b

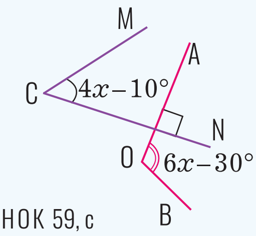


РИСУНОК 59, c

7. Даны два угла с соответственно перпендикулярными сторонами. Найдите следующие углы:

a) $\angle CED = ?$ если $\angle AOB = 56°$,

b) $\angle AOB = ?$ и $\angle CED = ?$ если $\angle AOB : \angle CED = 2:7$,

c) $\angle AOB = ?$ и $\angle CED = ?$ если $\angle AOB = 3 \cdot \angle CED$,

d) $\angle AOB = ?$ и $\angle CED = ?$ если $\angle AOB = 20x + 44°$, $\angle CED = 10x + 46°$.

8. a) Один из углов с соответственно параллельными сторонами составляет 20% другого. Найдите градусную меру этих углов.

b) Углы с соответственно параллельными сторонами относятся как 3:6. Найдите разность квадратов их градусных мер.

c) Один из двух углов с соответственно перпендикулярными сторонами составляет $\frac{3}{5}$ частей другого. Найдите градусную меру этих углов.

9. **Физика:** Два груза P_1 и P_2 массой 10 кг и 5 кг соответственно подвешены к концам веревки, огибающей колеса A и B (рисунок 60). В точке C веревки AB подвешен груз P_3 массой 15 кг. Система находится в равновесии. Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

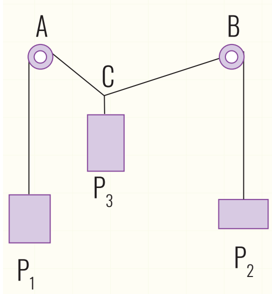


РИСУНОК 60

10. Начертите какой-нибудь 1) острый угол AOB и 2) тупой угол AOB.

a) Как расположен угол с вершиной в точке O и сторонами соответственно параллельными лучам OA и OB? Изобразите эти углы и назовите к какому виду они относятся.

b) Как расположен угол с вершиной в точке O и сторонами соответственно перпендикулярными лучам OA и OB? Изобразите эти углы и назовите к какому виду они относятся.

Обобщающие задания

1. Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 200°. Найдите эти углы.

A) $100°, 50°, 50°$; B) $80°, 80°, 40°$; C) $120°, 20°, 20°$

2. Внутренние накрест лежащие углы α и β получены при пересечении двух параллельных прямых третьей. Какое из следующих утверждений верно:

A) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; B) $\frac{\alpha}{\beta} = 1$; C) $\frac{\alpha}{\beta} = 0$; D) $\frac{\alpha}{\beta} > 0$?

3. Постройте угол, вершина которого лежит на стороне данного угла, а стороны соответственно параллельны его сторонам. Исследуйте расположение сторон этих углов.

4. Самир считает, что, если градусные меры углов AOB и MCD равны, то их соответствующие стороны перпендикулярны. Прав ли он? Можно ли утверждать, что соответствующие стороны двух углов параллельны или перпендикулярны, если сумма этих углов равна 180°?

5. Один из двух углов, получающихся при пересечении двух прямых третьей, больше другого на 30°. Найдите:

a) разность этих углов b) среднее арифметическое углов.

c) 25% от суммы этих углов

6. Внутренние накрест лежащие углы α и β получены при пересечении прямых *a* и *b* третьей прямой *c*. При выполнении какого условия прямые *a* и *b* будут параллельны:

A) $\alpha - \beta > 0°$; B) $\beta - \alpha = 0°$; C) $\alpha + \beta = 180°$; D) $\alpha + \beta = 90°$?

7. Соответственные углы α и β получены при пересечение прямых *a* и *b* третьей прямой *c*. При выполнении какого условия прямые *a* и *b* будут параллельны:

A) $\alpha : \beta = 1 : 1$; B) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; C) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$; D) $\alpha - \beta = 90°$?

8. Сумма наименьшего и половины наибольшего из внутренних односторонних углов, полученных при пересечении прямых *a* и *b* третьей прямой *c*, равна: a) 100°; b) 120°. Чему должен быть равен меньший из внутренних односторонних углов, чтобы прямые *a* и *b* были параллельными?

9. Один из двух внешних односторонних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей, составляет

Найдите эти углы: a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{7}{8}$.

ОДНОЧЛЕНЫ МНОГОЧЛЕНЫ

РАЗДЕЛ 4

Многочлены – это одно из наиболее употребляемых понятий в жизнедеятельности человека. Например, покупая в маркете 3 кг муки, 2 кг сахара и 1,5 кг масла, мы умножаем в уме эти числа на цену 1 кг соответствующего товара и складываем полученные произведения. Другими словами, предположим, 1 кг муки стоит m манат, 1 кг сахара – n манат и 1 кг масла к манат, тогда мы должны заплатить в кассу денег в количестве, равном сумме (многочлену) $3m+2n+1,5к$ манат.

Инженер, моделирующий какие-то кривые-графики, строитель при дизайн-проектировании дорог, зданий или других строений, экономисты при прогнозирование экономического роста, медики при изучении поведения бактерий и вирусов применяют понятие многочлена.

В этом разделе вы ознакомитесь с понятиями одночлена и многочлена, а также узнаете о действиях над ними.

РАЗДЕЛ 4

1 Одночлен и произведение одночленов

Одночлены состоят из произведения чисел и букв. В частном случае только число или только буква тоже есть одночлен. Множители, обозначенные буквами, могут называться переменными.

Примеры одночленов: $-\frac{1}{2}$; k; mn^6k; 0; $8y^2z^3$; $-\frac{7}{11}x$; $9ab\cdot(-3ab^6c)$

Число, полученное при умножении числовых множителей одночлена, называется **коэффициентом**.

$k = k^1$
$k = 1 \cdot k$

Одночлен $-\frac{1}{2}$ состоит только из коэффициента.

В одночлене к коэффициент равен $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{k}$ – переменная.

В одночлене 4x коэффициент равен $\mathbf{4}$, $\boldsymbol{x}$ – переменная.

В одночлене $8y^2z^3$ коэффициент – $\mathbf{8}$, переменные $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$.

В одночлене $9ab\cdot(-3ab^6c)$ коэффициент равен

$\mathbf{9\cdot(-3) = -27}$, переменные $\boldsymbol{a, b, c}$.

Степень одночлена: Сумма степеней буквенных множителей (переменных) одночлена называется степенью (порядком) одночлена. Если в одночлене нет буквенных множителей, то его степень считается равной нулю.

Степень $-\frac{1}{2}$ равна 0.

Степень $\mathbf{4x}$ равна $\mathbf{1}$, так как: $4x = 4x^1$.

Степень $\mathbf{8y^2z^3}$ равна $2 + 3 = 5$.

Степень $\mathbf{-27a^2b^7c}$ равна $2 + 7 + 1 = 10$.

Население: Население Азербайджанской Республики больше 10000000.

Это число можно коротко записать как:

$$10000000 = \underbrace{10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10}_{7\ раз} = 10^7$$

Произведение n множителей, каждый из которых равен a, называется натуральной степенью числа a порядка n и обозначается a^n. Здесь $n \geq 1$:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз} = a^n$$

Произношение: А в степени n или же степень а порядка n.

Вспомните, как читается a^2 и a^3.

a^n: n – степень, a – основание

Повторяющийся множитель a называется основанием степени с натуральным показателем n.

Число повторений множителя a, то есть число n называется порядком или показателем степени.

Частные случаи:

$a^1 = a, \quad a^2 = a\cdot a, \quad a^3 = a\cdot a\cdot a, \quad a^4 = a\cdot a\cdot a\cdot a.$

ЗАПОМНИ:

- $1^n = 1$,
- $0^n = 0$ при $n > 0$,
- $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Исследование: Произведение множителей одночлена, являющихся натуральными степенями с одинаковыми основаниями, определяется следующим образом:

$$m^3 \cdot m^5 \cdot m = \overbrace{\underbrace{(m \cdot m \cdot m)}_{m^3} \cdot \underbrace{(m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m)}_{m^5} \cdot \underbrace{m}_{m^1}}^{9 \ раз} = m^9$$

При умножении одночлена на одночлен получается опять одночлен:

$$9ab \cdot (-3ab^6c) = 9 \cdot (-3) \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b^6 \cdot c = -27a^2b^7c$$

Как видим, произведение одночленов $9ab$ и $(-3ab^6c)$ записали в сжатом виде.

Одночлен, в котором числовой и буквенные множители записаны каждый только один раз, **называется одночленом в стандартном виде.**

В стандартном одночлене обычно на первом месте пишется числовой множитель, затем – буквенные в алфавитном порядке.

Например: $7m^2 \cdot 0{,}8n$ не является стандартным видом одночлена, потому что в нём два числовых множителя. Запишем одночлен в стандартном виде, предварительно перемножив эти два числовых множителя:

$$7m^2 \cdot 0{,}8n = 7 \cdot 0{,}8\ m^2n = 5{,}6m^2n$$

Произведение натуральных степеней с одинаковым основанием:

Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ЗАПОМНИ: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Например: $2^{11} = 2^{7+4} = 2^7 \cdot 2^4$
$2^{11} = 2^{1+2+3+5} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5$

ОБРАЗЦЫ:

$x^4 \cdot x^2 = x^6$ $\qquad (-2)^2 \cdot (-2)^7 = (-2)^9$

$3^5 \cdot 3^7 = 3^{12}$ $\qquad -y^2 \cdot y^{11} = -y^{13}$

$10^8 \cdot 10 \cdot 10^6 = 10^{8+1+6} = 10^{15}$

Одночлены, отличающиеся только знаком, называются **противоположными одночленами.**

Например: $2abc^2$ и $-2abc^2$; $-x$ и x; $0{,}3m$ и $-0{,}3m$ противоположные одночлены.

Равные друг другу одночлены, или же одночлены, отличающиеся только коэффициентами, называются **подобными одночленами**.

Например: Внизу указаны подобные одночлены:

коэффициент; буквенная часть x^2y^3

- ✓ $4x^2y^3 \rightarrow 4$
- ✓ $-4x^2y^3 \rightarrow -4$
- ✓ $3x^2y^3 \rightarrow 3$
- ✓ $-xy^3x = -x^2y^3 \rightarrow -1$
- ✓ $x^2y^3 \rightarrow 1$
- ✓ $4x^2y^2y = 4x^2y^3 \rightarrow 4$

Одночлен
$-2a^2b \cdot (-3ab^6c)$
↓
одночлен стандартного вида $6a^3b^7c$

Противоположный $-6a^3b^7c$
Коэффициент 6
Подобный (образец) $0{,}7a^3b^7c$
Степень $3+7+1 = 11$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из следующих выражений являются одночленами?

a) $2{,}5x^3y$; b) $a^2 + a$; c) $a^2 - b^4$; d) $-m$; e) c^{10};

f) $-7xy^4$; g) a^6a; h) $-2\frac{4}{13}m^2m^3m$; k) $0{,}6$; m) $\frac{10}{c}$;

n) $a \cdot (-0{,}5)$; p) $3(x + y)^2$ q) 1; s) -23; r) $\frac{2x}{y}$

2. Найдите произведение натуральных степеней:

a) $5^2 \cdot 5^5$; b) $(-0{,}7)^4 \cdot (-0{,}7)$; c) $9^{12} \cdot 9^3$;

d) $x^6 \cdot x^5 \cdot x \cdot x^2$; e) $a^2 \cdot a \cdot a^3$; f) $-y^4 \cdot y^5$.

3. Наиль, Фарид, Юсиф, Мелек записали в таблицу одночлен подобный, как они считают, одночлену $7ab^5c^2$. Выясните, кто из них привёл правильный пример. Объясните ошибку того, кто дал неверный пример.

Одночлен	Пример Наиля	Пример Фарида	Пример Юсифа	Пример Мелек
$7ab^5c^2$	$13ab^5c^2$	$-9ab^5c^2$	ab^5c^2	$7a^5bc^2$

Запишите какой-либо одночлен, подобный нижеуказанному одночлену.

mn^2c^2	$-42x^6y$	$2abc$	-56	$2{,}34t^7$

4. Выполните действия по алгоритму приведения одночлена к стандартному виду: $6a \cdot 3ab \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)a^2b$

Алгоритм:

1) Найдите произведение всех числовых множителей:

$6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -15.$

2) Буквенные множители запишите в алфавитном порядке:

$a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = a^4b^2.$

3) Запишите в стандартном (сжатом) виде: $-15\ a^4b^2$.

Общая запись:

$$6a \cdot 3ab \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)a^2b = 6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot a \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = -15a^4b^2$$

Применение: Выполните умножение и запишите в сжатом виде:

a) $3a \cdot (-5a^4)$; b) $-7b^4 \cdot (b^8) \cdot b$; c) $-0{,}5c^3d \cdot (-9c^6)d^7$;

d) $10xy^5 \cdot (-x^6y)$; e) $4x^2 \cdot 3y^3$; f) $0{,}2a \cdot c^3 \cdot (-7b)$;

g) $(-a)^2 \cdot (-a)^3$; h) $-1{,}2m^2n \cdot 0{,}3m$; m) $-3bc^3 \cdot (-y^4) \cdot \frac{5}{9}c^3y$.

5. Математический диктант:

a) Коэффициент 14, переменные a, b и c, степень 11. Запишите одночлен. Представьте его в виде произведения двух одночленов.

b) Коэффициент -15, переменные x и y, степень 8. Запишите одночлен нестандартного вида. Приведите его в стандартный вид.

c) Запишите какой-нибудь одночлен стандартного вида. Запишите противоположный ему одночлен.

6. Придумайте одночлены с переменными m и n такие, чтобы у них

a) коэффициенты были равны, буквенные множители разные;

b) буквенные множители были бы одинаковые, коэффициенты – разные.

В каком случае получаются подобные одночлены?

7. Приведите одночлены к стандартному виду, определите коэффициент и степень одночлена.

a) $3mndm \cdot 7md^2$; b) $(-0{,}1kx^4)^2 \cdot 30x^2$; c) $2{,}3cab^3 \cdot \left(\frac{1}{3}ac\right)^2$;

d) $14yx^2 \cdot xy \cdot \left(-\frac{5}{7}yx\right)$; e) $(5ab)^3 \cdot (-0{,}2a^2b)^2$; f) $1{,}3(-n)a \cdot (0{,}2bn^2)^3$.

8. Возведите в степень.

a) 2^7; b) 5^3; c) $(1{,}4)^2$; d) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; e) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5$

f) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$ g) $(1{,}(5))^2$; h) 3^5; k) $(-0{,}7)^3$; m) $\left(-\frac{7}{12}\right)^2$;

n) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^3$; l) $(-0{,}(6))^2$.

9. Запишите выражения в виде произведения степеней с одинаковым основанием.

a) 7^{2+3}; b) 9^{a+b}; c) $(-11)^5$; d) $\left(\frac{7}{15}\right)^{p+q}$; e) m^{12}; f) b^{x+y+z}.

10. Вычислите x^n для заданных значений x и натурального n.

a) $x = 1{,}(2)$; $n = 3$; b) $x = 0{,}0(7)$; $n = 2$; c) $x = 1{,}(2)$; $n = 4$.

11. Вычислите значения выражений:

a) $3^n + 2^n$ при $n = 2$;

b) $a^4 - a^2$ при $a = -\frac{3}{4}$.

12. Представьте:

a) $0{,}49$; $0{,}64$; 169; $1\frac{11}{25}$; $1{,}44$; $\frac{100}{121}$ в виде квадрата некоторого числа;

b) 64; -216; $0{,}001$; $-\frac{8}{125}$; $4\frac{17}{27}$; $-1\frac{127}{216}$ в виде куба некоторого числа;

c) 25; 125; 625; 15625 в виде степени числа 5.

13. Примените степень с основанием 2 для вычисления:

a) $8 \cdot 32$; b) $4 \cdot 32$; c) $16 \cdot 64$; d) $128 \cdot 2$;
e) $256 \cdot 64$; f) $8 \cdot 1024$

14. Примените степень с основанием 3 для вычисления:

a) $9 \cdot 3$; b) $27 \cdot 81$; c) $3^4 \cdot 9$; d) $243 \cdot 32$;
e) $729 \cdot 27$; f) $81 \cdot 3^6$

15. Определите площадь заданных на рисунках 1 a, b, c прямоугольников. Укажите коэффициент и степень полученного одночлена.

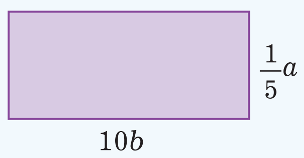


РИСУНОК 1, a

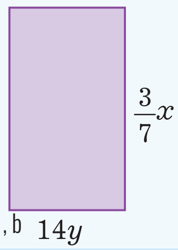


РИСУНОК 1, b

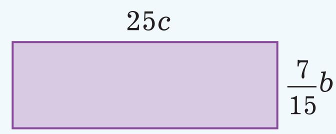


РИСУНОК 1, c

16. Определите объём заданных на рисунках 2 a, b, c фигур. Укажите коэффициент и степень полученного одночлена.

прямоугольный параллелепипед

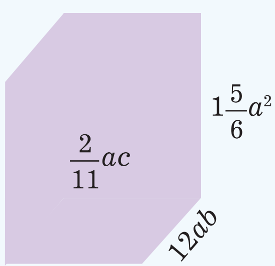


РИСУНОК 2, a

цилиндр

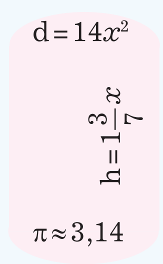


РИСУНОК 2, b

куб

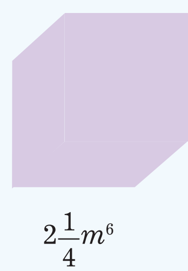


РИСУНОК 2, c

РАЗДЕЛ 4

2 Отношение одночленов

Сокращение дроби – это деление числителя и знаменателя на общий множитель, отличный от единицы.

Например, сократим дробь $\frac{18x^7}{2x^3}$. Для этого сначала разложим одночлены, стоящие в числителе и знаменателе дроби, на множители:

$$\frac{18x^7}{4x^3}=\frac{\cancel{2}\cdot 9\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{x}}=\frac{9\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{2}=\frac{9x^4}{2}=4{,}5x^4.$$

Обратите внимание на деление одночлена x^7 на одночлен

$$\frac{x^7}{x^3}=x^7:x^3=x^4$$

7 – 3 = 4

Таким образом, получается правило деления натуральных степеней с одинаковым основанием:

Как видим, одинаковые одночлены в числителе и знаменателе сократились.

Для любого отличного от нуля рационального числа a и натуральных чисел m и n. выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

В этом равенстве стороны можно поменять:

$$a^{m-n} = a^m : a^n$$

ПРИМЕРЫ:

$x^9 : x^2 = x^7$ $\qquad$ $(-2)^{13} \cdot (-2)^8 = (-2)^5$

$3^7 \cdot 3^5 = 3^2$ $\qquad$ $y^8 : y^8 = y^{8-8} = y^0 = 1$

$19^{41} : 19 : 19^{23} = 19^{41-1-23} = 19^{17}$

ЗАПОМНИ:

$1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$,

так как

$a^0 = 1$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исправьте ошибки, запишите правильно и объясните.

a) $a^8 : a^7 = a^{15}$;
b) $x^{16} : x^2 = a^8$;
c) $b^{30} : b^5 \cdot b = b^8$;
d) $m^{12-8} = m^{12} - m^8$;
e) $a^3 \cdot a^3 : a^2 \cdot a^5 = a^3$;
f) $k^{44} \cdot k^2 = k^{22}$;
g) $n^{11} : n^5 = n^{10}$;
h) $b^{13} - b^8 - b^2 = b^3$.

2. Найдите отношения:

a) $\frac{5x^4}{25x}$; b) $\frac{8ab^5}{2ab^3}$; c) $\frac{x^{24}}{x^{18}}$;

d) $m^{15} : m^7$; e) $\frac{(-2)^{17}}{(-2)^{13}}$; f) $\frac{\left(3\frac{1}{2}\right)^9}{(3{,}5)^5}$.

3. Запишите выражение $a^k : a^m \cdot a$ в виде степени с основанием a и вычислите его значение при $a = 3, k = 2, m = 4$.

4. Запишите выражение $m^8 : m^2 : m^3$ в виде степени с основанием m. Вычислите значение при

a) $m = 3$; b) $m = 10$; c) $m = (-2)$; d) $m = 17$

5. Дополните таблицу, предварительно записав числа в виде степени.

$(3{,}2)^{24} : (3{,}4)^4 =$	$5^7 : 5^5 : 5^2 =$	$(-0{,}16)^4 : (-0{,}16) =$
$(a-b)^{15} : (a-b)^7 =$	$7^{20} : 7^4 : 7 =$	$21^2 : 21 \cdot 21^5 =$
$(x-2y)^{19} : (x-2y)^{10} =$	$11^4 : 11 \cdot 11^9 =$	$1{,}7 \cdot 1{,}7^8 : 1{,}7^6 \cdot 1{,}7 =$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{21} : \left(\frac{3}{4}\right)^{18} : \left(\frac{3}{4}\right)^{9} =$	$x^{15} : x^7 \cdot x : x^3 =$	$(1{,}(5))^{13} : (1{,}(5))^6 =$

6. Упростите:

a) $\dfrac{-15x^4}{5x^2}$; b) $\dfrac{-24a^9}{-8a^7}$; c) $\dfrac{16a^{12}b^7}{8a^{10}b^5}$; d) $\dfrac{28m^9n}{-4m^2n}$;

e) 200^0; f) m^0; g) $\dfrac{62x^4yz^7}{14xy^5z^5}$; h) $\dfrac{6a^0b^8}{18b^3}$.

7. Упростите выражения, применив правило деления степеней:

a) $\dfrac{\left(2\frac{5}{6}\right)^9}{\left(2\frac{5}{6}\right)^7}$ b) $\dfrac{\left(-1\frac{1}{6}\right)^{18}}{\left(-1\frac{1}{6}\right)^{11}}$ c) $\dfrac{(-0{,}7)^{29}}{(-0{,}7)^{27}}$ d) $\dfrac{3^9 \cdot 27}{3^5 \cdot 81}$ e) $\dfrac{16 \cdot 2^{19}}{2^{22}}$

f) $\dfrac{7^{12}}{7^7 \cdot 49}$ g) $\dfrac{5^{17} \cdot 125}{5^7 \cdot 625}$ h) $\dfrac{(0{,}(21))^{15}}{(0{,}(21))^{14}} \cdot \dfrac{\left(4\frac{5}{7}\right)^8}{\left(4\frac{5}{7}\right)^7}$ k) $\dfrac{(0{,}7)^9 \cdot \frac{7}{10}}{(0{,}7)^7 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2}$

8. Запишите выражения в виде произведения и отношения нескольких степеней.

a) x^{10}; b) y^6; c) 11^7; d) 4^{13}; e) 9^{14}; f) 5^{22}.

9. Мыслить обратно: Вместо «*» запишите степень с основанием c так, чтобы получилось верное равенство. Результат обоснуйте, применив правило деления степеней.

a) $c^2 \cdot * = c^8$; b) $ccc \cdot * = c^{10}$;
c) $cc^7 \cdot * = c^{18}$; d) $* \cdot c^{14} = c^{21}$;
e) $* \cdot cc^4 = c^9$; f) $* \cdot c^{15} \cdot c^3 = c^{43}$.

10. Найдите неизвестную:

a) $x : 7^2 = 7^8$; b) $11^6 : y = 11^3$; c) $a : 45^9 = 45^{12}$.

11. Геометрия: Объём прямоугольного параллелепипеда выражается одночленом $12x^2y$ (рисунок 3). Какому одночлену равна высота параллелепипеда?

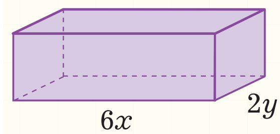


РИСУНОК 3

12. Упростить:

a) x^4x^0; b) $a^9 : a^0$; c) $\frac{m^0}{k^7}$; d) $n^0 - m^0$; e) $p^0 + c^0$.

13. Упростить:

a) $7^{n+1} : 7^n$; b) $a^k : a^{k-1}$; c) $11^{a+2} : 11^{a-1}$;
d) $3^{m+4} : 3^{m-5} \cdot 3^{10}$; e) $4^a : 4^{a-7} : a^0$; f) $m^{a+1} : m^{a-2}$.

14. Вместо m и n подставьте такие числа, чтобы степень выражения $a^{n+1} : a^m$ была равна

a) 8; b) 11; c) 7.

Подсказка: Исследуйте степени числа 3

15. Признаки делимости: Обоснуйте, что при любых натуральных n значение дроби тоже есть натуральное число:

a) $\frac{10^n - 1}{9}$; b) $\frac{10^n + 8}{9}$; c) $\frac{10^n - 4}{3}$.

16. Покажите, что при любом натуральном значении k

a) число 3^{4k} оканчивается на единицу;

b) число $10^k - 1$ кратно 3.

17. Изучайте в сравнении:

Расположите числа a, a^2 и a^3 в порядке возрастания, если

a) $0 < a < 1$; b) $-1 < a < 0$; c) $a > 1$; d) $a < -1$

18. В какой одночлен можно вписать вместо (*)?

a) $5x^{13}y^{11} : * = \frac{1}{5} x^6y^4$; b) $-24a^{21}b^9 : * = 3{,}5a^6$;

c) $* : 3\frac{3}{4}m^8n^{11}k^7 = mk^4$.

Проверьте себя

19. Можно ли разделить одночлен 8x 7на одночлен 2xy, чтобы в частном получился одночлен?

20. Как изменится площадь приусадебного участка, если длину участка увеличить в 3 раза, ширину уменьшить в 2 раза?

РАЗДЕЛ 4

3 Возведение произведения и отношения одночленов в степень

Исследование: Найдём значение выражения $(2^3)^4$

$(2^3)^4 = (2^3)\cdot(2^3)\cdot(2^3)\cdot(2^3) = (2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2) = 2^{12}$.

Значит, $(2^3)^4 = 2^{12}$. **$3 \cdot 4 = 12$**

Вообще можно сформулировать правила возведения натуральной степени в степень:

Для любого рационального числа a и натуральных m и n

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ПРИМЕРЫ:

$(x^9)^2 = x^{18}$; $(-8^5)^3 = (-8)^{5\cdot3} = (-8)^{15}$;

$(3^7)^5 = 3^{35}$; $((0,2)^2)^4 = (0,2)^8$;

$((m^3)^4)^2 = m^{3\cdot4\cdot2} = m^{24}$.

При возведении натуральной степени в степень основание остаётся без изменения, а произведение степеней записывается в степень.

ЗАПОМНИ

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

ПРИМЕР:

$$2^{15} = (2^5)^3 = (2^3)^5.$$

Действительно,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ штук} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ штук}} = a^{mn}$$

Возведение произведения в степень:

Для любых рациональных чисел a и b и натурального числа m

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m$$

ПРИМЕР:

$$(3a^5bc^4)^2 = 3^2 \cdot (a^5)^2 \cdot (b^1)^2 \cdot (c^4)^2 = 9a^{10}b^2c^8.$$

Возведение отношения в степень:

Чтобы возвести отношение в степень, надо возвести в эту степень отдельно числитель и отдельно знаменатель.

Для любых рациональных чисел a и b ($b \neq 0$) и натурального числа m

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

ПРИМЕР:

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{5^2}{9^2} = \frac{25}{81}$$

ЗАПОМНИ

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

ПРИМЕР:

$$\frac{6^m}{11^m} = \left(\frac{6}{11}\right)^m$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исправьте ошибки в равенствах. Ответ обоснуйте.

a) $(x^3)^2 = x^5$; b) $(a^9)^3 = a^{27}$; c) $(m^7)^5 = m^2$;
d) $x^5 \cdot (x^{10})^0 = x^{15}$; e) $(x^3)^3 : x^5 = x^1$; f) $(n^2)^4 \cdot (n^9)^2 = n^{25}$;
g) $(m^5)^2 = m^{25}$; h) $(a^{23})^2 = a^{46}$.

2. Вместо x подставьте такое число, чтобы равенство было верным. Ответ обоснуйте.

a) $(3^4)^x = 3^{12}$; b) $(a^x)^{10} = a^{40}$; c) $x^5 \cdot x^3 = 7^8$;
d) $(x^4)^{25} = 3^{100}$; e) $(8^3)^x : 8^5 = 8^{10}$; f) $5^x \cdot 5^x = 5^{26}$.

3. Севиль представила одночлен $16a^4b^8$ в виде $(4a^2b^4)^2$, Самир – в виде $(2ab^2)^4$. Чей результат верен? Ответ объясните.

4. Возведите одночлены в степень:

a) $4x^2y$ в квадрат; b) $-2m^3n^2$ в куб;
c) $-4ax^3$ в степень 4.

5. Представьте одночлены в виде квадрата какого-либо одночлена:

a) $81x^2y^4$; b) $144\ a^4b^2c^6$; c) $169\ y^{12}$; d) $0{,}04m^{10}$; e) $\frac{9}{25}b^8$.

6. Представьте одночлены в виде куба какого-либо одночлена:

a) $64x^9$; b) $125\ a^6c^6$; c) $216\ y^{12}$; d) $0{,}027m^{15}$; e) $-\frac{8}{27}b^9$.

7. a) Запишите дробь, которую можно представить в виде квадрата некоторой дроби.

b) Запишите дробь, которую можно представить в виде куба некоторой дроби.

c) Запишите дробь, которую можно представить в виде куба некоторой дроби и в виде квадрата другой дроби.

8. Запишите выражение 2^{20} в виде степени с основанием

a) 2^2; b) 2^4; c) 2^5; d) 2^{10}. Каким правилом надо воспользоваться?

9. Выполните возведение в степень:

a) $(3x^2)^3$; b) $(-2m^4n^2)^3$; c) $(-x^2yz^4)^5$; d) $(-0{,}6a^3bc^4)^2$;
e) $(-2xy^3)^4$; f) $(-x^2y^5z^4)^5$; g) $\left(-\frac{1}{2}k^7\right)^3$; h) $\left(2\frac{2}{5}abc^3\right)^2$.

10. В виде куба или квадрата какого одночлена можно представить следующие одночлены?

a) a^6b^{12}; b) $1000000x^{24}$ c) $0{,}000001p^{18}$

11. Обоснуйте следующие утверждения

a) Квадраты противоположных одночленов равны;

b) Кубы противоположных одночленов противоположны;

c) Что вы можете сказать о чётной степени или же нечётной степени противоположных одночленов.

d) Модули противоположных одночленов равны.

12. Упростите выражения:

a) $(-xy^2)^3 \cdot (-x^4y)^2$; b) $(x^4y^2)^3 \cdot (-3xy^4)^2$; c) $-\left(\frac{1}{2}ab^5c\right)^3 \cdot (-4ab)^3$;

d) $(-2x^2y^3)^4 \cdot (-3y^3)^2$; e) $(-0{,}5abc^6)^2$; f) $\left(\frac{1}{3}m^3n\right)^3 \cdot (9mn^2)^5$;

g) $\left(-\frac{2}{7}ab^4\right)^3 \cdot \left(-3\frac{1}{2}a^5b\right)^2$; h) $\left(\frac{2}{5}xz^4\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^5z\right)^3$.

13. Выполните деление:

a) $(9x^4y^6)^3 : (3xy^5)^2$; b) $(-2x^3y^5)^6 : (-4xy^3)^2$; c) $\left(\frac{1}{4}x^6\right)^2 : \left(\frac{1}{2}x^5\right)^2$.

14. Представьте степени в виде отношения:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; b) $\left(\frac{-5}{9}\right)^5$; c) $\left(2\frac{1}{4}\right)^3$;

d) $\left(\frac{m}{nk}\right)^9$; e) $\left(\frac{abc}{9}\right)^4$.

15. Запишите отношения в виде степени:

a) $12^5 : 6^5$; b) $\frac{25a^2b^2}{16}$; c) $\frac{32m^5n^{10}}{k^{15}}$.

РАЗДЕЛ 4

4 Многочлен и его стандартный вид

Сумма и разность одночленов является новым понятием. Например, сумму одночленов $4x^2y$; $-0{,}5xy^2$; 8; $-3x$ можно записать в виде $4x^2y + (-0{,}5xy^2) + 8 + (-3x)$.

Сумму одночленов называют **многочленом**.

Одночлены, входящие в сумму, называются членами или слагаемыми многочлена.

$4x^2y + (-0{,}5xy^2) + 8 + (-3x) = 4x^2y - 0{,}5xy^2 + 8 - 3x$ многочлен. $4x^2y$; $-0{,}5xy^2$; 8 и $-3x$ являются слагаемыми этого многочлена. Количество слагаемых 4.

Одночлен	Многочлен с одним слагаемым, **например**, a; $2x^2y^3$; $-b^3$.
Двучлен	Многочлен с двумя слагаемыми, **например**, $a + 2x^2y^3$; $-b^3 + 7$.
Трёхчлен	Многочлен с тремя слагаемыми, **например**, $2x + 5x^2y^3 - 7b^3$.
Многочлен	Многочлен с большим числом слагаемых, **например**, $-4ab^3 - 11b + xy^2 - 13 + 0{,}2ab$.

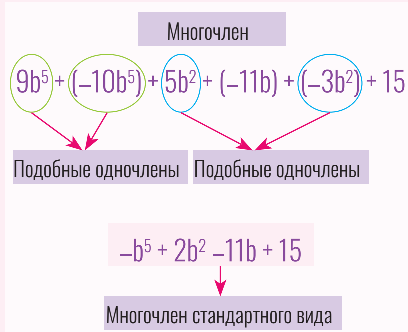
Многочлен, не содержащий подобных слагаемых, каждое слагаемое которого записано в стандартном виде, называется **многочленом стандартного вида.** Чтобы привести многочлен к стандартному виду, надо каждое слагаемое привести к стандартному виду, сделать приведение подобных слагаемых и расположить слагаемые в порядке убывания степеней.

Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен, приведённый предварительно к стандартному виду, называется **степенью** многочлена.

Одночлен степени 0, входящий в многочлен, называется **свободным членом многочлена**.

ПРИМЕР 1: Многочлен $9x^7y - 6x^5y^2 + 4x^3 - 8xy + 2$ записан в стандартном виде.

- ✓ *Члены*: (*слагаемые*) $9x^7y$; $-6x^5y^2$; $4x^3$; $-8xy$; 2.
- ✓ *Степень:* 8 (это степень одночлена $9x^7y^1$: $7 + 1 = 8$).
- ✓ *Коэффициенты:* 9; -6; 4; -8; 2.
- ✓ *Свободный член:* 2.
- ✓ *Старший (первый) коэффициент:* 9.



$6x^2y^3 + 5xy^3 + 7x - 8$

Степени слагаемых	5	4	1	0
Степень многочлена	5			

ПРИМЕР 2: Привести многочлен $x^6 + 3xyx + x^2y + 4yx^2 - 7xxy - 6yyx + y^3y - 19$ к стандартному виду, определить свободный член и степень многочлена.

РЕШЕНИЕ: Приведём все слагаемые многочлена к стандартному виду и сделаем приведение подобных слагаемых.

$$x^6 + 3xyx + x^2y + 4yx^2 - 7xxy - 6yyx + y^3y - 19 = x^6 + 3x^2y + x^2y + 4x^2y - 7x^2y - 6xy^2 + y^4 - 19 = x^6 + y^4 + x^2y - 6xy^2 - 19$$

Многочлен $x^6 + y^4 + x^2y - 6xy^2 - 19$ стандартного вида. Одночлены, входящих в многочлен, имеют степени 6; 4; 3; 3; 0 соответственно. Одночлен наибольшей степени x^6 имеет степень 6. Степень многочлена равна 6. Свободным членом многочлена является – 19.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите слагаемые многочлена в таблице по образцу и определите степень многочлена.

Многочлен	I слагаемое	II слагаемое	III слагаемое	IV слагаемое	Свободный член	Степень
$4x^6y - 11x^3y + 0{,}5xy^2 + x - 9$	$4x^6y$	$-11x^3y$	$0{,}5xy^2$	x	-9	7

a) $2x + 5y - 12$;
b) $-6x^4 + y^3 - 5y + 11$;
c) $14a^5b + ab^2 - a^2b - a^2b + 8a - 7b$;
d) $8{,}2mnk - 1{,}02m^2n + 11a - 9$;
e) $\frac{1}{2}a - 0{,}6b - 3\frac{7}{9}c + 12ab - c + 7{,}1$.

2. Определите слагаемые и степень многочлена:

a) $3x^5 + 2x^3 - 4$;
b) $2a^4 - 3a + 2$;
c) $y^5 + y^4 - 2y^2 - 1$;
d) $2m^5 + 7$;
e) $4xy^6 + xy^2 - x^2 + y^8$;
f) $a^4 - bc^2 - 6$.

3. Запишите многочлен в стандартном виде, сделав приведение подобных слагаемых:

a) $10xy - 6xy + 3xy$;
b) $4x^4 - 5x + 9x^2 - 7x^4 + 6x$;
c) $6ab - 11ab + 3a^2b$;
d) $5a^3 + a^2 - 12 + 2a^3 + a^2 - a - 20$.

4. Определите многочлены, равные двучлену $3a^2 + b$:

a) $4a^2 - 4b - a^2 + 17b - b$;
b) $12a^3 - 9b - 9a^2 + 6b + b$;
c) $-0{,}7a^2 - 7b - 2{,}3a^2 + 8b$;
d) $1{,}8a^2 - 4{,}2b + 1{,}2a^2 + 5b + 0{,}2b$.

5. Приведите многочлены к стандартному виду. У какого из многочленов свободный член отличен от нуля? Запишите степень каждого многочлена.

a) $-4p^4 + 21p^3 + 4p^4 - 8p^2 + 7p^2$;

b) $2aa^2 + a^2 - 6a^2 + a^3 - a$;

c) $8xx^5 + 3xx^4 - 5x^2x^3 - 6xx^2$;

d) $5a \cdot 4b^2 - 0{,}8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1$.

6. Определите степень многочлена:

a) $4a^6 - 2a^7 + a - 1$;

b) $5p^3 - p - 2$;

c) $1 - 3x$;

d) $4xy + xy^2 - 5x^2 + y$;

e) $8x^4y + 5x^2y^3 - 11$;

f) $xy + yz + xz - 1$.

7. Выполните приведение подобных слагаемых и вычислите значение многочлена при заданных значениях переменных:

a) $2a^3 + 3ab - b^2 - 6a^3 - 7ab + 2b^2$, $a = 2$; $b = -6$;

b) $mn - 6mn^2 - 8mn - 6mn^2$, $m = 0{,}5$; $n = -2$;

c) $10xy^2 + x^2y + xy^2$, $x = \frac{1}{3}$, $y = 9$.

8. Используя одночлены $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$, придумайте и запишите:

a) многочлен стандартного вида,

b) многочлен с подобными членами.

9. Запишите данные выражения в виде многочленов:

a) $\overline{cba}$;

b) $\overline{abc} - \overline{ab}$;

c) $\overline{a0c} + \overline{ac}$;

d) $\overline{cab} + \overline{ca}$;

e) $\overline{abcd} + \overline{bcda}$;

f) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

10. Исследование:

Можно ли обосновать делимость разности $\overline{abbb} - a$ на 37 при любых числах a и b, предварительно проверив делимость на 37 выражения a) $4555 - 4$; b) $9111 - 9$; c) $7666 - 7$

11. Расскажите, что общего и в чём различие между многочленом стандартного вида и многочленом нестандартного вида.

$\overline{mnpk}$ – четырёхзначное число. Если записать числа в виде суммы разрядных слагаемых:
$\overline{mnpk} =$
$= 1000m + 100n + 10p + k$,
то получится многочлен.

РАЗДЕЛ 4

5 Сложение и вычитание многочленов

Вы знаете, как складывать и вычитать одночлены, приведённые к стандартному виду. Вам известно, что слагаемые многочлена являются одночленами. И значит, многочлены тоже можно складывать и вычитать.

ПРИМЕР 1: Сложите многочлены $6x^2 + 8x - 5$ и $-3x^2 + 7x - 11$

РЕШЕНИЕ: $(6x^2 + 8x - 5) + (-3x^2 + 7x - 11)$. Чтобы выполнить это действие, необходимо раскрыть скобки, выполнить приведение подобных членов и записать многочлен в стандартном виде:

$$(6x^2 + 8x - 5) + (-3x^2 + 7x - 11) =$$
$$= \underline{6x^2} + \underline{8x} - \underline{5} - \underline{3x^2} + \underline{7x} - \underline{11} = 3x^2 + 15x - 16.$$

ПРИМЕР 2: Найти разность многочленов $-x^3 + 7x^2 - 8x + 9$ и $4x^2 - 3x + 1$

Вспомните правило раскрытия скобок. Как меняются знаки в скобках, если перед скобкой стоит знак «-»?

РЕШЕНИЕ: $(-x^3 + 7x^2 - 8x + 9) - (4x^2 - 3x + 1)$. Чтобы выполнить это действие, необходимо опять раскрыть скобки, выполнить приведение подобных членов и записать многочлен в стандартном виде:

$$(-x^3 + 7x^2 - 8x + 9) - (4x^2 - 3x + 1) =$$
$$= -x^3 + \underline{7x^2} - \underline{8x} + \underline{9} - \underline{4x^2} + \underline{3x} - \underline{1} = -x^3 + 3x^2 - 5x + 8.$$

Таким образом, сумма и разность двух и более многочленов является многочленом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выполните над многочленами $2a^3 - 7a + 8$ и $a^3 - 11a - 3$ нижеуказанные действия и упростите полученный результат:

Результаты обсудите

a) сумму первого и второго многочленов;
b) сумму второго и первого многочленов;
c) разность первого и второго многочленов;
d) разность второго и первого многочленов.

2. Выполните действия, результат запишите в стандартном виде.

a) $(1 + 4a) + (a^2 - 3a)$;
b) $(7x^2 + 2x) + (-x^2 + 5)$;
c) $(y^2 - 6y) + (4y - y^2)$;
d) $(c^2 - c + 7) - (c^2 + c + 3)$;
e) $(8n^3 - 6n^2) - (1 + 8n^3 - 5n^2)$;
ə) $(m^2 + 9m + 2) - (m^2 + 9m - 2)$.

3. Упростите выражения:

a) $3{,}5x - (7{,}4x + 3{,}1x^2)$;   b) $9a^2 + (3 - a^2) - (5{,}8a^2 - 2)$;

c) $-2{,}7k^2 + 1{,}6k + (4{,}1k - k^2)$;   d) $(1{,}7b - b^2 + 4) + 0{,}2b^2 - (8{,}7b - b^2)$.

4. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

a) $(4a + 5b - c) + (8a - 6b + c)$;   b) $(3a^2 + 8a - 4) - (3 + 8a - 5a^2)$;

c) $(b^3 - 3b^2 + 4b) - (b + 2b^2 + b^3)$;   d) $(0{,}1x^2 + 0{,}02y^2) + (0{,}17x^2 - 0{,}08y^2)$.

5. a) Запишите многочлен $P + Q$, если $P = 5a^2 + b$; $Q = -4a^2 - b$.

b) Определите степень многочлена $A + B - C$, если $A = a^2 - b^2 + ab$; $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$; $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$.

6. Определите многочлен A применив правила нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого и вычитаемого. Найдите степень многочлена A.

a) $A + (12y^2 + 6y - 1) = -10y + 9$;

b) $(-6x^2 + 7x - 11) - A = 2x^2 + 2x - 1$;

c) $A - (6a^2 - 5ab + b^3) = 4b^3 - 11ab$;

d) $(25x^5 - 13x^3 + 7) + A = 15x^5 - 13x^2$.

7. В таблице показана сумма денег на банковских счетах Самира, Наги, Юсиф и Назир. По таблице определите:

a) Разность чьих счетов равна $(5x + 13)$?

b) Разность чьих счетов равна $(8x - 24)$?

c) Разность чьих счетов равна $(3x - 37)$?

d) Сколько денег в манатах на счету у каждого, если $x = 100\,\$$, а курс доллара: $1\$ = 1{,}70$ ₼?

Счёт в банке	
Имя	**Баланс**
Самир	$6x + 7$
Наги	$7x - 10$
Юсиф	$12x + 3$
Назир	$4x + 27$

8. Определите периметры фигур на рисунках 4 (a, b, c, d). Укажите свободные члены полученных многочленов.

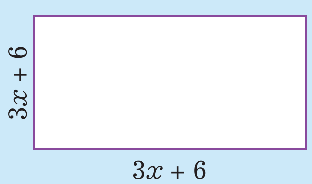


РИСУНОК 4, a

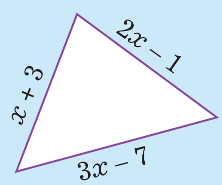


РИСУНОК 4, b

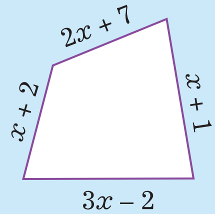


РИСУНОК 4, c

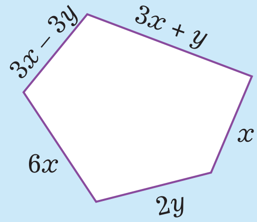


РИСУНОК 4, d

9. Обоснуйте следующие утверждения:

a) сумма двух последовательных нечётных чисел кратно 4;

b) сумма четырёх последовательных нечётных чисел кратно 8;

c) сумма пяти последовательных натуральных чисел кратно 5.

10. Выполните действия.

a) $(4a + 5b - 6c) + (3a - 7b + 2c) - (2a - b + 7c)$;

b) $(3x^3 - 7x + 21) - (-x^3 - 2x^2 - 3x) + (4x^3 - 21)$;

c) $(9ax^3 - 5ax^2 + 6ax) - (-3ax^3 - 6ax^2 - 7ax) - (5ax^3 + ax)$;

d) $(a^3 - 0{,}12b^3) + (0{,}39a^3 - b^3 - 9) + (0{,}01a^3 - 1{,}88b^3 + 11)$.

11. a) Покажите, что $(a - b) + (b - c) + (c - a)$ равно 0;

b) $(x^2 - 5xy) - (12 - 3xy) + (2xy - x^2)$ равно 12.

12. **Обсуждение:** Ученикам предложили найти значение выражения $(7x^3 - 6x^2y + 5xy^2) + (5x^3 + 7x^2y + 3xy^2) - (10x^3 + x^2y + 8xy^2)$ при $y = -0{,}25$ Гюлай утверждает, что для выполнения задания необходимо знать, чему равен y. Как по-вашему, права ли она?

a) В каком случае её утверждение верно?

b) Преобразуйте выражение.

c) Сделайте выводы.

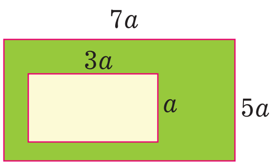


РИСУНОК 5, *a*

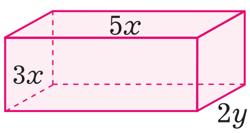


РИСУНОК 5, *b*

13. Исследуйте связь между площадью и объемом фигур и многочленами.

a) Найдите площадь, закрашенную зелёным цветом, на рисунке 5*a*.

b) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке 5*b*.

14. Какой многочлен необходимо прибавить или вычесть от многочлена $5x^2 + 3y^2 - 2xy + 6$, чтобы в полученном выражении

a) отсутствовала переменная x;

b) отсутствовала переменная y?

15. **Авиация:** Максимальная общая масса самолёта T вычисляется по формуле $T = T_о + T_д + T_т + T_п$. Здесь $T_о$ – масса корпуса самолёта, $T_д$ – масса двигателей, $T_т$ – масса топлива, $T_п$ – масса пассажиров и груза. На основе этой формулы ответьте на следующие вопросы:

1) Какие слагаемые являются постоянными членами для произвольного самолёта при известных массе двигателей собственной массы?

2) Предположим масса самолёта T имеет максимальное возможное значение, а масса топлива $T_т$ достаточна для полёта на требуемое расстояние. Как повлияет увеличение массы топлива на другие слагаемые?

16. Покажите, что значение выражения не зависит от переменной x:

$$\left(\frac{3}{4}x^2 - 0{,}4xy - 1{,}5y + 1\right) - \left(y^2 - \frac{2}{5}xy + 0{,}6x^2\right)$$

17. Покажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

a) $1{,}9 - 17b^2 - (1 - 3b^2) + (9{,}6 + 14b^2)$;

b) $1 - y^2 - (3y - 2y^2) + (2 + 3y - y^2)$.

18. Для $A = 2\frac{3}{5}b - \frac{3}{4}b^3$; $\quad B = \frac{1}{4}b^3 - 1\frac{3}{5}b$; $\quad C = 1\frac{1}{4}b^3 + 6\frac{3}{5}b$

определите выражения:

a) A + B – C; b) A – B + C; c) B – A + C; d) C – B – A

19. Представьте многочлен в виде суммы каких-нибудь двух двучленов:

a) $4b^3 - 6b^2 + 12 - 8{,}2b$; b) $-5a^4 + 4a^3 + 3a^2 - 4a$.

20. Представьте многочлен в виде разности каких-нибудь двух двучленов:

a) $-x^3 + 3x^2 + x - 8$; b) $3y^4 + 7y^3 + 4y^2 - 6$.

21. **Свойства деления:** Известно, что при некоторых значениях n двучлен n^3+n нацело делится на 30. Можно ли утверждать, что

a) $n^3 + 31n$; b) $n^3 - 29n$ тоже нацело делится на 30?

Обоснуйте ответ.

Вспомните правило деления суммы на число. Какими должны быть слагаемые при этом?

22. Найдите неизвестный одночлен:

a) $(3a^2 + 2a - 4) + (\square + 5a^2 - 9) = 8a^2 - 5a - 13$;

b) $(6x^2y + 7xy - 9y^2) - (8x^2y - 2y^2 + \square) = -2x^2y + 9xy - 7y^2$.

23. Вы умеете складывать и вычитать многозначные числа столбиком. А можно ли то же самое проделать с многочленами? И как при этом следует записывать многочлены столбиком? Выскажите свои мысли.

Знаете ли вы? Многочлены можно складывать или вычитать, записывая их столбиком.

ОБРАЗЕЦ:

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 5c \\ + \;(8a + 2b - 2c) \\ \hline 12a - \;\; b + 3c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4a - 3b + 5c \\ - \;(8a + 2b - 2c) \\ \hline -4a - 5b + 7c \end{array}$$

Запишите подобные члены друг под другом.

Выполните действия, записав многочлены столбиком:

a) $(5k + 3r + t) + (r + 8t - 6k)$; b) $-4p + q - 2 + (11 + p + 5q)$;

c) $8y^4 + 7y^2 - 3 - (2y^4 - y^2 + 7)$; d) $z^3 + 4z^2 - z - (3z^3 - 2z^2 + 5z)$.

24. В какой многочлен обратится нижеуказанное выражение при $y = -2m$?

a) $y^2 + 5y - 4$; b) $3y^3 - 5y^2 + 2y - 5$; c) $y^5 - 0{,}5y^3 + 6y^2 - 11y$.

25. Расскажите, какие навыки вы приобрели, изучив эту тему. Какие дополнительные знания вы изучили?

РАЗДЕЛ 4

6 Умножение одночлена на многочлен

Вспомните:
Распределительное свойство умножения.

Вспомните переместительное свойство умножения

Вам известно распределительное свойство умножения при сложении или вычитании:

$a(b + c) = ab + ac$ или же $a(b - c) = ab - ac$.

Охарактеризуйте применение распределительного свойства умножения при сложении и вычитании при вычислении произведения одночлена на многочлен.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить одночлен на каждое слагаемое многочлена и полученные произведения записать в виде суммы.

ОБРАЗЕЦ: Найти произведение одночлена $-3a^2$ и трёхчлена $(4a^3 - a + 1)$.

РЕШЕНИЕ: $-3a^2 \cdot (4a^3 - a + 1) = -3a^2 \cdot 4a^3 - (-3a^2 \cdot a) + (-3a^2 \cdot 1) =$
$= -12a^5 + 3a^3 - 3a^2$.

Запомни:
Произведение одночлена на многочлен есть многочлен.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выполните умножение:

a) $5(2x + 7)$; b) $3m(m + 9)$; c) $(b - 11) \cdot 8b$;
d) $x(-3x + 6)$; e) $2x(5x^2 - 3x)$; f) $(10c^5 + 2c^3) \cdot (-2c^2)$;
g) $6(a^2 - 2a + 6)$; h) $2x(x^2 - 7x + 1)$; k) $(y^2 - 1{,}2y + 4) \cdot 1{,}7y$;

2. Записать произведение в виде многочлена:

a) $-10x^5(-4x^3 - 3x^2 + 5)$;
b) $n^2(7n^3k^4 + 11n^2k - nk^4 + 15)$;
c) $2ab(4a^2b^3 + 5ab^3 - 2{,}1ab)$;
d) $-3x^2y^3(-1{,}1 - 2xy^2 + 0{,}5x - 2{,}3y^3)$.

3. Представьте в виде многочлена:

a) $\frac{2}{5}x\,(1{,}5x^3 - 2{,}5xy)$; b) $\frac{3}{8}mn\,(\frac{2}{3}m^3n + \frac{4}{9}n^3 - \frac{1}{3}mn)$;

c) $-\frac{1}{7}a^2\,(1{,}4b^7 - 4{,}9ab)$; d) $-\frac{5}{6}p^3k^2\,(5p^5k - \frac{3}{10}p^3k - 1\frac{1}{5}k^4)$.

4. Упростите выражения и найдите значение:

a) $6(x-2)+5(1-3x)$, $\quad x=-1{,}3$;

b) $14a-7(2a-1)+2(9-5a)$, $\quad a=11$;

c) $y-2(10y-2)+(8y-3)$, $\quad y=-0{,}6$;

d) $19(3-2m)+12m-9(m+1)$, $\quad m=2$.

5. Здание в форме прямоугольного параллелепипеда имеет длину – $3a$, ширину – b, высоту – $(a+2b+c)$ (рисунок 6). Каким многочленом выражается объём этого здания?

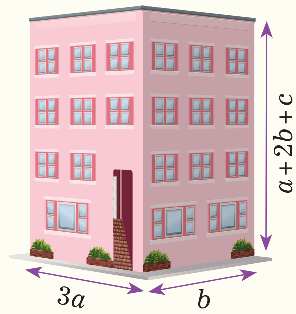


РИСУНОК 6

6. На рисунке 7 показан план сада. Найдите площадь сада на плане при $a=8$ см, $b=5$ см, $c=3$ см. Определите реальную площадь сада, зная масштаб плана 1 : 200.

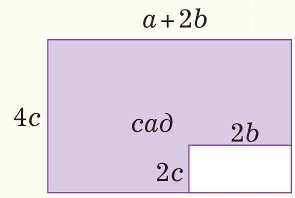


РИСУНОК 7

7. Обоснуйте, что:

a) при любом значении x выражение $x(2x+1)-x^2(x+2)+(x^3-x+3)$ принимает одно и то же значение;

b) значение выражения $y(3y^2-y+12)-(3y-16+2y^3)-y(2+y^2-y)$ не зависит от y;

c) выражение $a(b+c-bc)-b(c+a-ac)+c(b-a)$ равно 0;

d) выражение $2x(x-6)-3(x^2-4x+1)$ всегда принимает отрицательное значение.

8. Применяя метод умножения одночлена на многочлен столбиком, выполните умножение:

a) $2x^2$

$5x^3+3x^2-5x-2$

b) $-7a^2b$

$-2a^5-6a^3b-5a-3b$

c) m^2n^2k

$1-0{,}5m^3n+m+4n-k$

ОБРАЗЕЦ:

$-4x^2$

$2x^5+\ x\ -5$

$-8x^5-4x^3+20x^2$

9. Упростите выражения:

a) $(6m-4m+9n)\left(-\frac{1}{6}m^2\right)$

b) $-0{,}5x^2(2x^2+6x-7)$;

c) $2a(a-b)-a(a-2b)$;

d) $-x(x^2-7)+x^2(x-3)$;

e) $(1+3a-a^4)\cdot 5a$;

f) $3a^4x\,(a^2-2ax+x^3-1)$;

g) $\frac{2}{7}x(1{,}4x^2-3{,}5y)$

h) $\frac{1}{2}ab\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}ab+\frac{4}{5}b^2\right)$

k) $-\frac{1}{3}c^2\left(1{,}2d^2-6b^2\right)$

m) $-\frac{2}{5}a^2y^5\left(5ay^2-\frac{1}{2}a^2b-\frac{5}{6}a^3\right)$

Вспомните правило переноса слагаемых уравнения с одной стороны от знака равенства на другую.

Запомни:
Под геометрическим смыслом подразумевается объяснение алгебраических формул в соответствии со свойствами геометрических фигур.

10. Решите уравнения:

a) $5x + 3(x - 1) = 6x + 11$; b) $3x - 5(2 - x) = 54$;

c) $8(y - 7) - 3(2y + 9) = 15$; d) $0{,}6 - 0{,}5(y - 1) = y + 0{,}5$;

e) $6 + (2 - 4x) + 5 = 3(1 - 3x)$; f) $0{,}15(x - 4) = 9{,}9 - 0{,}3(x - 1)$.

11. При каком значении переменной:

a) выражение $2(3 - 5c)$ на 1 меньше выражения $4(1 - c)$?

b) выражение $-3(2x + 1)$ на 20 больше выражения $(8x + 5)$?

c) выражение $(5x + 7)$ в 3 раза меньше выражения $(61 - 10x)$?

d) выражение $8 - y$ в 2 раза больше выражения $(7 + y)$?

12. Геометрия: Периметр треугольника 44 см. Одна сторона меньше другой на 4 см, но в 2 раза больше третьей стороны. Найдите стороны треугольника.

13. Геометрия: Объясните геометрический смысл равенства $\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$ по данным рисунка 8 для любых положительных значений переменных a, b и c.

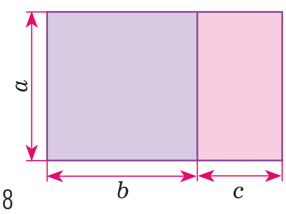


РИСУНОК 8

14. Запишите многочлен, выражающий площадь закрашенной части фигуры на рисунке 9 .

Вспомните:
Вам известно, как находить площадь фигуры, дополняя ее до прямоугольника.

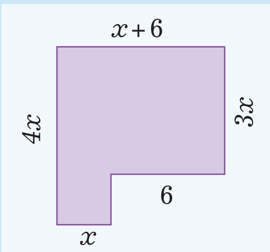


РИСУНОК 9, a

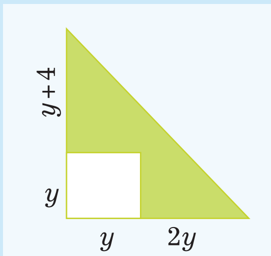


РИСУНОК 9, b

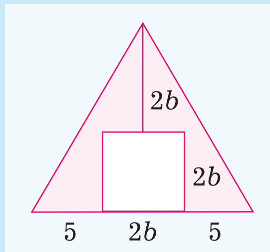


РИСУНОК 9, c

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 4

7 Умножение многочлена на многочлен

Вы изучили умножение одночлена на многочлен. Рассмотрим умножение многочлена на многочлен.

Исследование: Найдём произведение $(x + 5)(x + 2)$. Объясним это произведение на геометрических фигурах.

На рисунке 10 изображена модель прямоугольника со сторонами, длины которых выражены двучленами $(x + 5)$ и $(x + 2)$.

Площадь этого прямоугольника равна $S = (x + 5)(x + 2)$. Эта площадь является суммой площадей фигур, на которые разбивается этот прямоугольник. $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

$$\mathbf{S = (x + 5)(x + 2) = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10}$$

Таким образом, чтобы найти произведение двух двучленов, надо дважды применить распределительное свойство умножения: $(x + 5)(x + 2)= x(x + 2) + 5(x + 2) = x^2 + 7x + 10$

Другими словами, каждое слагаемое член первого двучлена умножается на каждое слагаемое второго двучлена и записывается сумма полученных произведений:

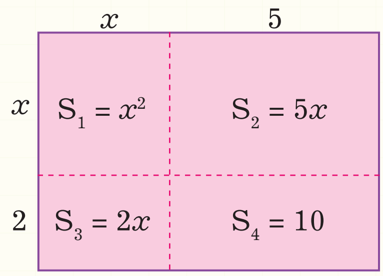


РИСУНОК 10

ВНИМАНИЕ:
Произведение $(x + 5)(x + 2)$ можно так тоже вычислять:
$(x + 5)(x + 2) =$
$= x\,(x + 5) + 2(x + 5) =$
$= x^2 + 5x + 2x + 10 =$
$= x^2 + 7x + 10.$

Результат тот же.

Итак, обобщая, можно привести следующее правило: Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждое слагаемое первого многочлена умножить на каждое слагаемое второго многочлена и записать сумму полученных произведений.

$$\boldsymbol{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

ПРИМЕР: Запишите произведение в стандартном виде:
$(x + 3)(x^3 + 2x^2 - 8)$

РЕШЕНИЕ: Сначала применим вышеуказанное правило умножения многочлена на многочлен, затем, сделав приведение подобных слагаемых, запишем многочлен в стандартном виде.

$$(x + 3)(x^3 + 2x^2 - 8) =$$

$$= x \cdot x^3 + x \cdot 2x^2 + x \cdot (-8) + 3 \cdot x^3 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot (-8) =$$
$$= x^4 + 2x^3 - 8x + 3x^3 + 6x^2 - 24 =$$
$$= x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 8x - 24.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно каждое слагаемое двучлена умножить на трехчлен и раскрыть скобки:
$(x + 3)(x^3 + 2x^2 - 8) =$
$= x(x^3 + 2x^2 - 8) +$
$+ 3(x^3 + 2x^2 - 8) = \ldots$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите многочлен, выражающий площадь смоделированных на рисунках 11 (a, b, c, d) прямоугольников.

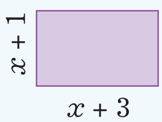


РИСУНОК 11, a

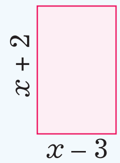


РИСУНОК 11, b

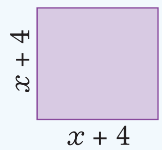


РИСУНОК 11, c

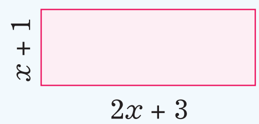


РИСУНОК 11, d

2. Запишите произведение двучленов, построив модели прямоугольников.

a) $(x + 3)(x + 3)$; b) $(x + 1)(x + 4)$; c) $(2x + 1)(x + 3)$;
d) $(3x + 1)(x + 2)$; e) $(x + 4)(2x + 3)$; f) $(3x + 1)(x + 1)$.

3. Преобразуйте произведение многочленов в многочлен.

a) $(x^2 + 2)(x - 3)$; d) $(5x^2 - 6y^2)(6x^2 - 5y^2)$;
b) $(3x^2 - 5x)(2 - x)$; e) $(a^2 + 2b)(2a + b^2)$;
c) $(c - 4)(c + 4)$; f) $(x^2 + 2x + 1)(x + 3)$.

4. Применяя правило умножения одночлена на многочлен, найдите произведение многочленов.

ОБРАЗЕЦ: $(3a^2 - 3a + 5)(a - 7)$

РЕШЕНИЕ: $(3a^2 - 3a + 5)(a - 7) = 3a^2 \cdot (a - 7) - 3a \cdot (a - 7) + 5 \cdot (a - 7) =$
$= 3a^3 - 21a^2 - 3a^2 + 21a + 5a - 35 = 3a^3 - 24a^2 + 26a - 35$

a) $(2x^2 + 7x - 3)(x + 3)$; b) $(x^3 - 11xy + 5y)(xy - x)$;
c) $(a - b - c + k)(1 - ac)$; d) $(9m^2 - 5mn + n^2)(3m - n)$;
e) $\left(\frac{3}{4}ab - 2b^2 + \frac{1}{2}\right)(a + 6b)$; f) $(-p^3 + q)(-\frac{3}{5} - q^2 + p)$.

5. Вычисляя значение выражения $(5x - 1)(x + 3) - (x - 2)(5x - 4)$ при $x = \frac{1}{2}$, Севиндж получила 49. Каким удобным способом можно проверить её результат?

6. Упростите выражения:

a) $(x + 3)(x - 3) + (4 - x)x - 3x$;

b) $x(1 - 2x) - (x - 3)(x + 3) + 3x^2$;

c) $x^2(3 - x) - (2 - x^2)(x + 1) - 4x^2$;

d) $(x + 2)(x + 2) - x(5 - x) - 2x^2$.

При каком значении x значение выражения будет равно a?

7. Упростите выражения:

a) MN-PQ при $M = a - 3$, $N = a^2 - 8a + 5$, $P = a - 8$, $Q = a^2 - 3a + 5$;

b) AB-CD при $A = x^2 - 3x + 2$, $B = 2x + 5$, $C = 2x^2 + 7x + 17$, $D = x - 4$.

8. Обоснуйте следующие утверждения при любом натуральном n:

a) выражение $n(n + 22) - (n - 2)(n + 12)$ кратно 12;

b) выражение $(n + 8)(n + 9) - n(n - 7)$ кратно 24.

9. Найдите значение выражения:

a) $(x - 5)(x - 3) - (x + 1)(x + 2)$ при $x = -2\frac{10}{11}$;

b) $(a + 6)(a - 2) - (a - 7)(a + 1)$ при $a = 0{,}51$;

c) $(a^2 - ab + 2b^2)(a - b) - (a^2 + 2ab - b^2)(a + 2b)$ при $a = -1\frac{1}{2}$, $b = -1\frac{1}{2}$;

d) $(a^2 + 4ax + x^2)(a - 2x) - (a^2 - 5ax - 2x^2)(a + x)$ при $a = -1\frac{1}{2}$, $b = 0{,}27$.

10. Вместо точек впишите такие выражения, чтобы выполнялось равенство.

a) $(2a - 5b)(\ldots - \ldots) = 6a^3 - 15a^2b - 14ab + \ldots$;

b) $(\ldots - \ldots)(6x^2 - 5y^2) = 12x^3 + 42x^2y - \ldots - 35y^3$;

c) $(\ldots - \ldots)(\ldots - \ldots) = 24c^4 - 18a^3 - 4ab^3 + \ldots$;

d) $36y^5 - 54y^4 + 10y - \ldots = (\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots)$.

11. Решите уравнения.

a) $12x^2 - (4x - 3)(3x + 1) = -2$;

b) $(x + 1)(x + 2) - (x + 3)(x + 4) = 0$;

c) $10x^2 - (2x - 3)(5x - 1) = 31$;

d) $(x - 2)(x - 3) - (x + 2)(x - 5) = 0$.

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 4

8 Разложение многочлена на множители

Что означает «разложение на множители»? В предыдущей теме вы научились умножать многочлен на многочлен. В выражении $A = B \cdot C$ A – произведение, B и C – множители. В этом выражении произведение А записано в разложенном на множители В и С виде.

Представление многочлена в виде произведения многочленов, степень которых не меньше 1, называется разложением многочлена на множители.

Например, произведение двучленов $(x + 3)$ и $(x^2 - 1)$ равно $x^3 + 3x^2 - x - 3$. Здесь $(x + 3)$ и $(x^2 - 1)$ – множители, $x^3 + 3x^2 - x - 3$ – их произведение:

$$\underbrace{x^3+3x^2-x-3}_{\text{многочлен}}=\underbrace{(x+3)\cdot(x^2-1)}_{\text{множители}}$$

ВНИМАНИЕ: не все многочлены разлагаются не множители

Например, двучлен $2a + 6$ в виде произведения можно записать по-разному:

$$2a + 6 = 1 \cdot (2a + 6) = 2 \cdot (a + 3) = -2\cdot(-a - 3)$$

и т.д. Но степень множителей 1, 2 и −2 равна 0. Значит, записанные произведения не считаются разложением на множители.

Вспомните как находят НОД (50; 75) и НОК (50; 75)

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное одночленов:

Вы знакомы с понятием наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух и более натуральных чисел. Ознакомимся с этими понятиями в применении к одночленам и многочленам.

Например, рассмотрим одночлены: $14x^2y^3$ и $21x^3y$.

Так как $14x^2y^3 = 2 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$ и

$21x^3y = 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y$,

то

НОД $(14x^2y^3; 21x^3y) = 7 \cdot x \cdot x \cdot y = 7x^2y$,

НОК $(14x^2y^3; 21x^3y) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y = 42x^3y^3$.

В данных выражениях общий множитель может быть одночленом, двучленом и так далее.

ПРИМЕР: Для $M = x(x + 3)^2(x - 1)$ и $N = x^2(x + 3)(x - 1)^2$ найдём НОД и НОК.

РЕШЕНИЕ: Так как $M = x(x + 3)^2(x - 1) = x \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1)$ и

$N = x^2(x + 3)(x - 1)^2 = x \cdot x \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)$,

одночлен x, двучлены $x + 3$ и $x - 1$ являются общими множителями

то НОД(M; N) = $x(x + 3)(x - 1)$ и НОК(M; N) = $x^2(x + 3)^2(x - 1)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из выражений невозможно разложить на множители и почему?

a) $x^3 - 4x$; b) $y^5 + 12x$; c) $7z^2 + 6z + z$;

d) $5xy^2 + 2y$; e) $9a + b$; f) $15 - 5x^3$.

2. Определите общие множители выражений:

a) a^3 и $2a^2$; b) 5 и $15x$; c) $8b^2$; $-4b$ и b^3;

d) $9x^4$ и $3x$; e) $12z^2$ и $6z^3$; f) $(y+1)$ и $(y - 1)(y + 1)$.

3. Определите необщие множители выражений:

a) b и $4b$; b) $-25x$ и x^2;

c) $(a + 2)$ и $(a - 1)(a + 2)$; d) $2x^4$ и $5x$;

e) $3z^2$ и z^3; f) $(m + 3)(m - 2)$ и $(m - 2)(m + 3)$.

4. Найдите НОД многочленов:

a) $2a^3$ и $4a$; b) $5xy^4$ и $10x^2y$; c) $(x - 2)^2(x - 1)$ и $2(x - 1)^2$;

d) $-9c^3$ и $-18c$; e) $x(x +1)$ и $(x + 1)^2$; f) $(b - 5)(b +7)$ и $(b - 5)^2$.

5. Найдите НОК многочленов:

a) $3a$ и $5a^2b$; b) $3{,}5y^4$ и $7x^2y$; c) $(y - 9)^2(x - 1)$ и $(x - 1)^2$;

d) c^3 и c; e) $x^2(x - 1)$ и $(x + 1)$; f) $(n - 3)(n +6)$ и $(n +6)^2$.

I. МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Рассмотрим несколько способов разложения многочленов на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки

Если у многочленов есть общий множитель, он выносится за скобки, остальные члены записываются в скобках.

Примеры:

1) В двучлене $ax + bx$ является множитель x одинаковым множителем каждого слагаемого, его называют общим множителем. Вынося x за скобку, остальные множители записываются в скобках: $ax + bx = x\,(a + b)$.

2) $m^2 - m = m \cdot m - m \cdot 1 = m\,(m - 1)$

3) $2x^2y^3 - 5xy^2 = 2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y - 5 \cdot x \cdot y \cdot y = xy^2(2xy - 5)$

4) $3a(a + 2) - 7(a + 2) = (a + 2)(3a - 7)$

5) $a^2b^3x - 7ab^2x^2 + 5a^3bx^3 = abx \cdot ab^2 + abx \cdot (-7bx) + abx \cdot 5a^2x^2 =$
$= abx\,(ab^2 - 7bx + 5a^2x^2)$

6) Так как для множителя $(2b - 3a)$ второго слагаемого данного выражения верно $(2b - 3a) = -(3a - 2b)$, то заданное выражение можно записать следующим образом:

$$2x^2y(3a - 2b) + 5x^3y^6(2b - 3a) =$$
$$= 2x^2y(3a - 2b) + 5x^3y^6(-(3a - 2b) =$$
$$= 2x^2y(3a - 2b) - 5x^3y^6\,(3a - 2b)$$

Отсюда получиться: $2x^2y(3a - 2b) - 5x^3y^6(3a - 2b) = (3a - 2b)\,(2x^2y - 5x^3y^6)$

Как видим, многочлен во второй скобке тоже разлагается на множители. То есть $2x^2y - 5x^3y^6 = 2 \cdot x^2 \cdot y - 5 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^5 = x^2y\,(2 - 5xy^5)$.

Таким образом, $2x^2y\,(3a - 2b) + 5x^3y^6\,(2b - 3a) = x^2y\,(3a - 2b)(2 - 5xy^5)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Разложите двучлены на множители:

a) $mx^2 - nx$; b) $6y^2 - 5y$; c) $3a^2b^4 + 9a^3b^2$;
d) $4 + 12xyz$; e) $abc^3 - a^2b^3c$; f) $0{,}5x^2t + xt^3$.

2. Разложите многочлены на множители:

a) $5x(a - 2) + 3y(a - 2)$; b) $9a(x + 6) - 7b(x + 6)$;
c) $(m - 1)^2 - 5(m - 1)$; d) $8(k + 4) + 4(k + 4)^3$.

3. Вынесите общий множитель за скобки:

a) $10b(a - b) + 3a(b - a)$; b) $7x(1 - x^2) - 6(x^2 - 1)$;
c) $n(x + y) + m(y + x)$; d) $(x - y) + 6(y - x) - 3(y - x)$.

4. Вынесите общий множитель за скобки:

a) $a^3b^2c + a^2bc^2 - ab^2c^3$; b) $4x^2y^6 - 2xy^4 + 6x^3y^2 - 8xy^5$;
c) $-7mn^4 - 14m^4 + 21mn^2$; d) $x^5y^2 + x^4y^3 - x^6y^4 + x^2y^6$.

5. Запишите выражения в виде произведения:

a) $x^2y(a-2x)+x^2y^3(a-2x)$; b) $a^3b(m-n)+ab^2(m-n)$;

c) $7x^6y^2(k-2t)-14x^3y^4(2t-k)$; d) $abc^4(3x-2a)-b^3c^2(2a-3x)$.

II. МЕТОД ГРУППИРОВКИ

Иногда бывает трудно выявить общий множитель для всех слагаемых многочлена. Поэтому члены, имеющие общие множители, надо сгруппировать, затем, применив метод вынесения общего множителя за скобки, выполнить окончательное разложение на множители.

Примеры:

1) В многочлене $ax+by+ay+bx$ общим множителем первого и третьего слагаемого является $\boldsymbol{a}$, второго и четвёртого – $\boldsymbol{b}$. Поэтому, группируя эти слагаемые и вынося общие множители за скобку, получим:

$$ax+by+ay+bx=(ax+ay)+(by+bx)=a(x+y)+b(y+x)$$

Так как выражение $(x+y)$ является общим множителем последнего выражения, то $a(x+y)+b(y+x)=(x+y)(a+b)$.

Итак, $\boldsymbol{ax+by+ay+bx=(x+y)(a+b)}$.

2) $7a^2x-by-a^2y+7bx=(7a^2x+7bx)-(by+a^2y)=$
$=7x(a^2+b)-y(a^2+b)=(a^2+b)(7x-y)$

3) $ac+bd-bc-ad=ac-bc+bd-ad=c(a-b)-d(a-b)=(a-b)(c-d)$

4) $2abx+aby-4acx-2acy=a((2bx+by)-(2\cdot 2cx+2cy))=$
$=a(b(2x+y)-2c(2x+y))=a(2x+y)(b-2c)$

5) $22\cdot 27-2\cdot 3+3\cdot 22-2\cdot 27=22\cdot 27+3\cdot 22-2\cdot 3-2\cdot 27=$
$=22(27+3)-2(3+27)=22\cdot 30-2\cdot 30=$
$=30(22-2)=30\cdot 20=600$

Внимание:

С какой целью числа и выражения группируют? Fikirləriniz önəmlidir.

Замечание:

В первом примере можно сгруппировать первое с четвертым, второе – с третьим слагаемым. Проделайте группировку самостоятельно. Результат исследуйте.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Наргиз разложила на множители несколько многочленов и записала в таблицу. Перемножив двучлены, найдите правильное разложение.

Многочлен	Разложение на множители
$\boldsymbol{x(b+c)+4b+4c}$	$(x+4)(b+c)$
$\boldsymbol{2c-2d+p(c-d)}$	$(2-c)(p-d)$
$\boldsymbol{mx+my+6x+6y}$	$(m+6)(x+y)$

Если разложение было ошибочным, запишите, как будет правильно.

2. Разложите многочлены на множители методом группировки:

a) $ax - by + xy - ab$;
b) $ay - 4bx^2 + 2ax^2 - 2by$;
c) $x^2 + 3x + 2x + 6$;
d) $\frac{3}{2}ax^2 + by - \frac{1}{2}axy - 3bx$.

3. В таблице для каждого многочлена записан один из множителей разложения. Найдите неизвестный множитель.

Многочлен	I множитель	II множитель
a) $ax + 6(b + x) + ab$	$a + 6$	?
b) $mn - mk + xk - xn$	?	$m - x$
c) $ax - 2bx + ay - 2by$	$x + y$	?
d) $1 - bx - x + b$	$1 - x$	?

$3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy =$
$= 3x^3 - 6x^2y^2 + xy - 2y^3 =$
$= 3x^2(x - 2y^2) + y(x - 2y^2) =$
$= (x - 2y^2)(3x^2 + y)$

4. Разложите многочлены на множители:

a) $x^3 + x^2 + x + 1$;
b) $a^2 - ab - 8a + 8b$;
c) $y^5 - y^3 - y^2 + 1$;
d) $ab - 5b + b^2 - 5a$;
e) $a^4 + 2a^3 - a - 2$;
f) $7x - xy + 7y - x^2$;
g) $b^6 - 3b^4 - 2b^2 + 6$;
h) $kn - mn - n^2 + mk$.

5. Представив одночлен $7a$ в виде суммы одночленов $3a$ и $4a$, Самир разложил трёхчлен $a^2 + 7a + 12$ на множители, применив метод группировки. Как, по-вашему, он это сделал? Намик представил $7a$ в виде суммы $2a$ и $5a$ но разложить трёхчлен на множители ему не удалось. Объясните почему?

Внимание:
В некоторых трехчленах одно из слагаемых можно представить в виде суммы двух таких одночленов, чтобы уже далее было возможно применить метод группировки.

6. Выполните следующий алгоритм разложения трёхчлена $x^2 + 6x + 5$ на множители:

I. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 5, а произведение – 6.

II. Представьте одночлен $6x$ в виде суммы двух одночленов с коэффициентами, равными найденным в 1-м пункте числам.

III. Сгруппировав слагаемые, разложите многочлен на множители.

IV. Проверьте результат, выполнив умножение найденных двучленов.

Запомните:
Это правило не всегда применимо.

7. Разложите на множители по алгоритму предыдущего пункта:

a) $a^2 - 5a + 4$;
b) $a^2 - 6a - 16$;
c) $x^2 + 9xy + 8y^2$;
d) $a^2 + 7ab + 6b^2$;
e) $y^2 - 9xy + 8x^2$;
f) $m^2 - 5mn + 4n^2$.

8. Запишите многочлен, выражающий площадь прямоугольника ABCD. Определите по рисункам 12, произведением каких двучленов является этот многочлен.

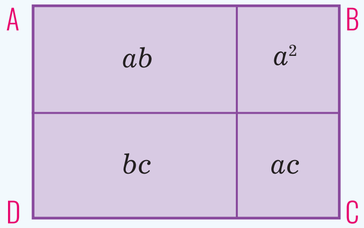


РИСУНОК 12, a

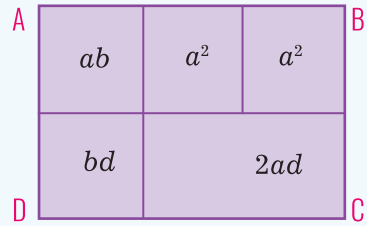


РИСУНОК 12, b

9. Постройте модель прямоугольника для заданного многочлена. Определите, какими двучленами определяются стороны прямоугольника.

a) $ab + ac + 2b + 2c$; b) $x^2 + 2xy + y^2$;

c) $8y + cz + 8z + cy$.

10. Гюльнар в многочлене $2am + 2an - 3bn - 3bm$ произвела следующую группировку $(2am + 2an) - (3bn + 3bm)$ и разложила многочлен на множители. Али же сделал группировку $(2am - 3bm) + (2an - 3bn)$ и затем разложил на многочлен множители. Кто из них сделал правильную группировку? Что вы скажете о полученных ими результатах?

11. Разложите выражения на множители и вычислите значения при заданных значениях переменных:

a) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$, $x = -3$, $a = 4$;

b) $m^2 - mn - 3m + 3n$, $m = 0{,}5$, $n = 0{,}25$;

c) $a^2 + ab - 11a - 11b$, $a = 6{,}6$, $b = 0{,}4$;

d) $a^2 - ab - 2a + 2b$, $a = \frac{7}{20}$, $b = 0{,}15$.

12. Вычислите:

a) $139 \cdot 18 + 139 \cdot 21 + 261 \cdot 21 + 261 \cdot 18$;

b) $125 \cdot 48 - 31 \cdot 82 - 31 \cdot 43 + 125 \cdot 83$;

c) $44{,}7 \cdot 13 - 2 \cdot 44{,}7 + 13 \cdot 5{,}3 - 2 \cdot 5{,}3$;

d) $3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} + 4{,}2 \cdot \frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{4}{5} + 2{,}8 \cdot \frac{2}{3}$

Проверьте себя

13. Вычислите значение выражения при заданных условиях:

a) $a^2 + ab - ac - bc$, если $a + b = 5$ и $b + c = 3$;

b) $xy - 6 + 2x - 3y$, если $y + 2 = 4$ и $3 - x = 5$;

c) $y + z$, если $x - y = 3$ и $x^2 + xz - xy - yz = 12$

14. Какое из утверждений верно?

a) Чтобы произведение было равно нулю, необходимо, чтобы хотя бы один из множителей был бы равен нулю;

b) Чтобы произведение было равно нулю, необходимо, чтобы оба множителя равнялись нулю;

c) Чтобы произведение было равно нулю, необходимо, чтобы ни один из множителей не равнялся нулю.

Внимание:

При $a \cdot b = 0$

что можно сказать о множителях a и b?

Из произведения $(x - a)(x - b) = 0$ следует $x = a$ и $x = b$.

15. Применяя условие равенства нулю произведения, решите уравнения.

a) $x(x - 8) + 2(x - 8) = 0$;

b) $y(y - 12) + y - 12 = 0$;

c) $a + 4 - a(a + 4) = 0$;

d) $(x^2 - 5x) + x - 5 = 0$;

e) $(x^2 + 7x) - 4x - 28 = 0$;

f) $5x^2 - 10x + (x - 2) = 0$.

16. Вместо точек впишите такой одночлен, чтобы выполнялось равенство:

a) $6a^3 - 15a^2b - 14ab + \ldots = (2a - 5b)(\ldots - \ldots)$;

b) $12x^3 + 42x^2y - \ldots - 35y^3 = (\ldots + \ldots)(6x^2 - 5y^2)$;

c) $24m^4 - 18m^3 - 4mn^3 + \ldots = (\ldots - \ldots)(\ldots - \ldots)$;

d) $36y^5 - 54y^4 + 10y - \ldots = (\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots)$.

III. ТОЖДЕСТВА

Равенство, выполняющееся при всех возможных значениях переменных, называется тождеством.

Чтобы доказать, что равенство является тождеством, можно:

1. Выражение, стоящее справа от знака равенства, преобразовать в выражение, стоящее слева, или, наоборот, выражение, стоящее слева от знака равенства, преобразовать в выражение, стоящее справа.

2. Показать, что оба выражения справа и слева от знака равенства равны одному и тому же некоторому третьему выражению.

3. Показать, что разность выражений, стоящих по разные стороны от знака равенства, равна нулю.

Преобразование выражения в равное ему выражение называется **тождественным преобразованием**. Выражения, значения которых равны при любых значениях переменных, называются **тождественно равными выражениями.**

Запомни:

При разложении многочлена на множители или при приведении произведения многочленов к многочлену стандартного вида получается выражение, тождественно равное исходному.

ПРИМЕР: Докажите равенство: $(x + 5)(x - 4) + 12 = (x - 1)(x + 2) - 6$

РЕШЕНИЕ: Докажем равность обоих сторон одному и тому же выражению:

$$\underbrace{(x + 5)(x - 4) + 12}_{\text{левая сторона}} = \underbrace{(x - 1)(x + 2) - 6}_{\text{правая сторона}}$$

Левая сторона: $(x+5)(x-4)+12 = x^2-4x+5x-20+12 = x^2+x-8$

Правая сторона: $(x-1)(x+2)-6 = x^2+2x-x-2-6 = x^2+x-8$

Так как обе стороны равны одному и тому же выражению, то заданное равенство является тождеством.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Керим утверждает, что равенство $21c(a - b) = -21c(b - a)$ является тождеством. Как по-вашему, прав ли он и почему? Как можно объяснить это, не раскрывая скобок?

2. a) Запишите переместительное и распределительное свойства сложения буквенными выражениями. Докажите, что эти равенства являются тождествами.

b) Запишите переместительное и распределительное свойства умножения буквенными выражениями. Являются ли они тождествами?

c) Какое свойство отражено в выражении $a(b + c) = ab + bc$? Можно ли утверждать, что это равенство есть тождество?

d) Выскажите мнение о равенствах $a + 0 = 0 + a$; $a \cdot 1 = a$; $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; $a + (-a) = 0$.

3. Проверьте, какие из равенств являются тождествами.

a) $2a + 4b = 2(a + 4b)$;

b) $x = x + 1$;

c) $a + b - c = a - c + b$;

d) $(m - n)(k - p) = (n - m)(p - k)$.

4. Покажите, что данные равенства являются тождествами.

a) $(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$;

b) $(3a - 2b)(3a - 2b) = 9a^2 - 12ab + 4b^2$;

c) $(a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

d) $(4m - 5n)(4m + 5n) = 16m^2 - 25n^2$.

e) $16 - (a + 3)(a + 2) = 4 - (6 + a)(a - 1)$;

f) $(2x - 5y)(4x + 3y) - (x + 2y)(5x - 6y) = 3x^2 - 18xy - 3y^2$;

g) $(m - a)(m - b) = m^2 - (a + b)m + ab$.

5. Какой одночлен надо прибавить к правой или же левой части равенства, чтобы оно стало тождеством? Объясните.

a) $(a + 5)(a - 12) = a^2 - 60...$;

b) $y^2 - 2... = (y + 1)(y - 1)$;

c) $(m - 7)(m + 10) = m^2 + 2m - 70...$;

d) $x^2 - 12x + 30... = (x - 7)(x - 5)$.

6. Не производя тождественных преобразований, определите какому числу равно заданное выражение. Затем, проведя тождественные преобразования, проверьте предыдущий ре зультат.

a) $(a - 3)(a^2 - 8a + 5) - (a - 8)(a^2 - 3a + 5)$;

b) $(x^2 - 3x + 2)(2x + 5) - (2x^2 + 7x + 17)(x - 4)$;

c) $(b^2 + 4b - 5)(b - 2) + (3 - b)(b^2 + 5b + 2)$.

7. Докажите тождества:

a) $a(b + c)^2 + b(a + c)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(a + c)(b + c)$.

b) $(a + b + c)(ab + ac + bc) - abc = (a + b)(a + c)(b + c)$.

c) Докажите, что равенства $a(a + b)(a + c) = abc$, $b(b + a)(b + c) = abc$, $c(c + a)(c + b) = abc$ являются тождествами при $a + b + c = 0$.

8. Вместо знака * представьте такое выражение, что бы полученное равенство стало тождеством.

$(5a^3 - 2ab + 6b) - (*) = 4a^3 + 8b$

9. Найдите разность левой и правой сторон равенства. Показывает ли полученный результат, что равенство было тождеством?

$(x - a)(x - b) = x^2 - x(a + b) + ab$.

10. Докажите тождественное равенство нулю следующего равенства.

$(b + c - 2a)(c - b) + (a + c - 2b)(a - c) - (b + a - 2c)(a - b)$.

11. a) Запомните трехчлен, который можно представить в виде произведения двучленов.

b) Запомните квадрат какого-нибудь двучлена с переменными a и b и представьте его в виде многочлена.

c) Запишите куб какого-нибудь двучлена с переменными x и y и представьте его в виде многочлена.

Обобщающие задания

1. Приведите многочлен к стандартному виду и определите его степень.

a) $-3xy + 9xy - 18xy$;

b) $12x^3 - 3x + 12x^3 - 11x^3 + 21x$;

c) $23a^4 + a^5 - 31 + 2a^4 - a^5 - 54$.

2. Найдите сумму и разность данных многочленов:

a) $(-4ab + 7b - 2c)$ и $(8ab - 2b + 2c)$;

b) $(-8x^2 + 11 - 2)$ и $(1 + 7x - 5x^2)$.

3. Найдите произведение. Определите степень полученного многочлена.

a) $-2x^4y(x^2 - 2xy + y^3 - 7)$;

b) $(a + 12)(a - 5)$;

c) $(x^3 + 3)(x + y - 3)$.

4. Разложите многочлен на множители:

a) $a^3 - a^2 + a - 1$;

b) $x^2 - xz - 5x + 5z$;

c) $b^2 - 8b + 12$;

d) $a(5 - b) + 8(b - 5)$.

5. Решите уравнения:

a) $a(a - 8) + 5(a - 8) = 0$;

b) $x(x + 6) + x + 6 = 0$.

6. Докажите тождества:

a) $a(b - x) + x(a + b) = b(a + x)$;

b) $16 - (a + 3)(a + 2) = 4 - (6 + a)(a - 1)$.

7. Решите уравнения:

a) $\frac{5x-4}{5} + \frac{2-7x}{3} = \frac{x-3}{2}$;

b) $0{,}75 - \frac{7+3x}{4} = \frac{10x-3}{3}$.

8. Вместо знака * запишите такой многочлен, чтобы получилось тождество:

$(5a^3 - 2ab + 6b) - (*) = 4a^3 + 8b$

9. Докажите, что при любом натуральном n значение многочлена будет кратно 3.

$(n + 1)(n + 2) - (3n - 1)(n + 3) + 5n(n + 2) + n + 7$

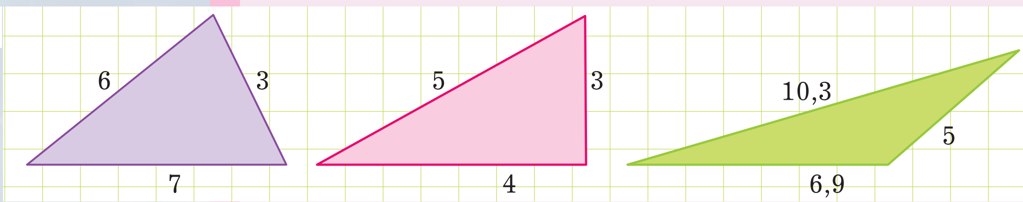
Проверьте себя

ТРЕУГОЛЬНИКИ

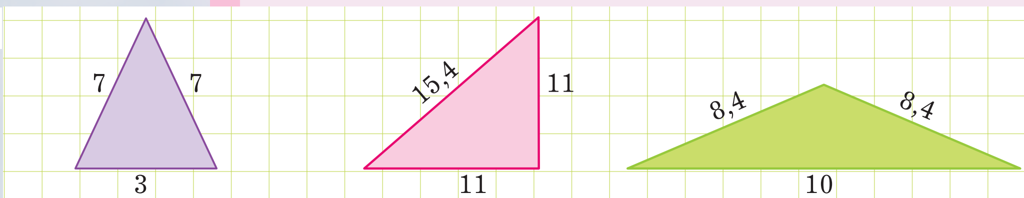
РАЗДЕЛ 5

В этом разделе вы изучите элементы треугольника и их свойства.

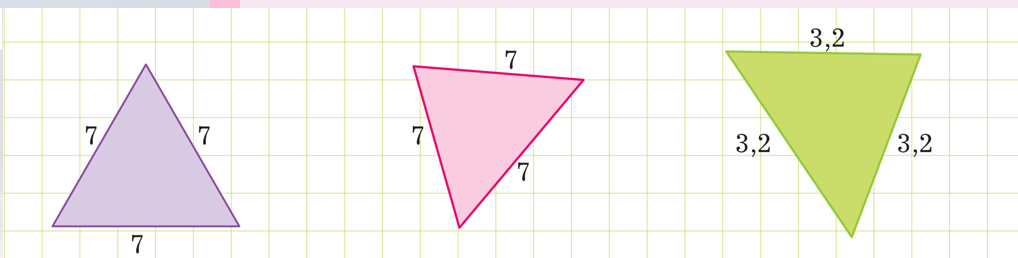
Разносторонние



Равнобедренные



Равносторонние

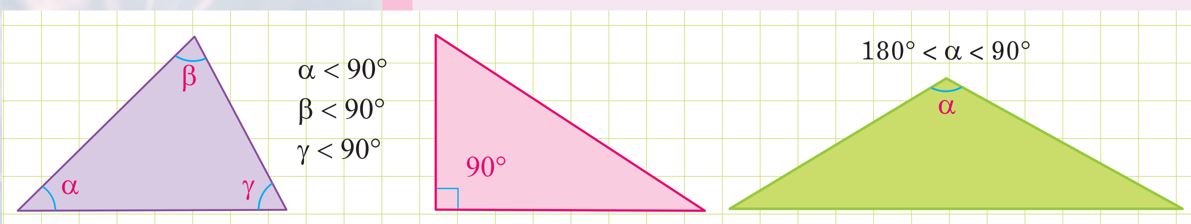


По сторонам

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По углам

Почему крыши домов строят в виде треугольников?



Остроугольные

Прямоугольные

Тупоугольные

РАЗДЕЛ 5

1 Построение треугольника по трём сторонам

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА: Построим треугольник, сторонами которого являются отрезки a, b и c.

1) Проведем некоторую прямую m. Отметим на ней произвольную точку A (рисунок 1).

2) Раздвинем концы циркуля на расстояние, равное длине отрезка a. Установим иглу циркуля в точке A и проведем дугу радиусом а так, чтобы она пересеклась с прямой m. Точку пересечения обозначим B.

РИСУНОК 1

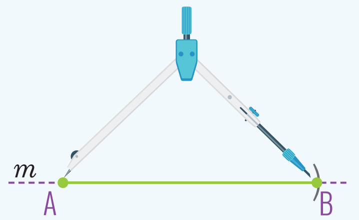


РИСУНОК 2

3) Раздвинем концы циркуля на расстояние, равное длине отрезка b. Установим иглу циркуля В точку A и построим окружность радиусом b (рисунок 3).

4) Раздвинем концы циркуля на расстояние, равное длине отрезка c. Установим иглу циркуля в точку B и проведем окружность радиусом c, пересекающую окружность, построенную в пункте 3 (рисунок 4).

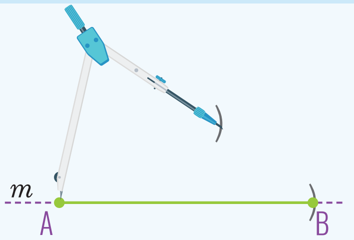


РИСУНОК 3

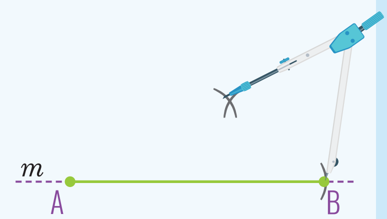


РИСУНОК 4

Вспомните, какими инструментами вы пользовались при построении геометрических фигур. Как по-вашему, какие инструменты нам понадобятся при построении треугольника?

ВНИМАНИЕ:

Иногда при построении достаточно вместо окружности начертить дугу.

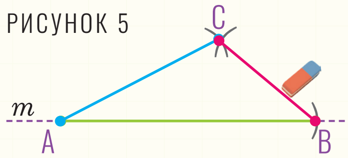


РИСУНОК 5

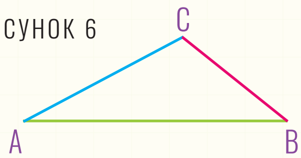


РИСУНОК 6

5) Обозначим точку пересечения окружностей буквой C. Соединим отрезками точку C с точками A и B. Уберем лишние линии (рисунок 5).

Полученный треугольник ABC является искомым (рисунок 6).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите алгоритм построения по рисункам 7 a и b.

- Постройте эти треугольники при $a = 3$ см и $b = 2$ см.
- Определите вид этих треугольников.

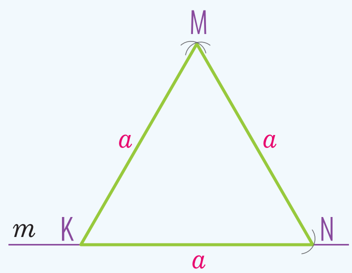


РИСУНОК 7, a

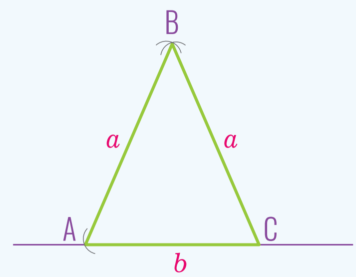


РИСУНОК 7, b

2. Постройте треугольники с длинами сторон:

a) 5 см, 5 см, 5 см; b) 3 см, 4 см, 5 см;
c) 4 см, 4 см, 5 см; d) 2,7 см, 4,3 см, 3,3 см

Определите вид каждого треугольника.

3. Начертите на листе бумаги треугольник со сторонами 2,8 см, 4,1 см и 4,9 см. Вырежте треугольник ножницами вдоль сторон. Сравните ваш треугольник с треугольником одноклассника. Равны ли ваши треугольники?

4. Постройте треугольник со сторонами

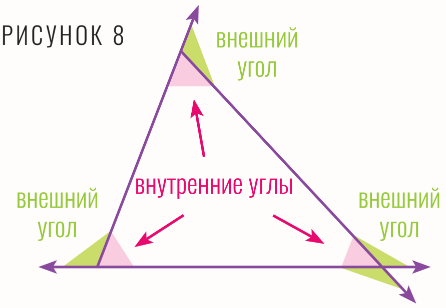
a) 0,34 дм; $\frac{3}{50}$ м и 4,7 см;
b) 4,2 см; 33 мм и 0,4 дм.

2 Стороны и углы треугольника

I. ВНУТРЕННИЕ И ВНЕШНИЕ УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

При каждой вершине треугольника есть один внутренний угол. Чтобы показать внешний угол треугольника при вершине, надо продолжить сторону при этой вершине в противоположную сторону (рисунок 8).

РИСУНОК 8



Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется **внешним углом** треугольника при той же вершине.

ВНИМАНИЕ:

При каждой вершине треугольника имеются два конгруэнтных внешних угла.

Вспомни:

Чему равна сумма смежных углов?

РИСУНОК 9

Сможете ли вы самостоятельно показать внутренние и внешние углы прямоугольного и тупоугольного треугольников (рисунок 9)? А как у равностороннего и равнобедренного треугольников?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразите на рисунке 10 внешний угол при вершине A треугольника ABC. Сколькими способами можно это проделать?
   a) Продолжите сторону AB от точки A в противоположную сторону по прямой. Полученный внешний угол обозначим BAD.
   b) Продолжите сторону AC от точки A в противоположную сторону по прямой. Полученный внешний угол обозначьте CAF.
   c) Выразите свое мнение об углах BAD и CAF.
   d) Что вы можете сказать об угле DAF?
   e) Тем же способом изобразите внешние углы при вершинах B и C. Сколько внешних углов получилось при каждой вершине?
   f) Какой угол образуют внутренний и один внешний углы вместе взятые при одной вершине?

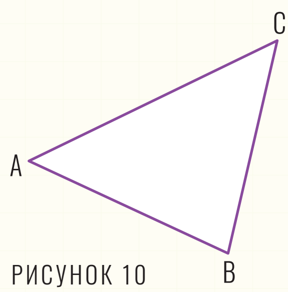


РИСУНОК 10

2. Обозначьте углы, изображенные на рисунке 11. Какие из углов не являются внешними углами треугольника? Почему?

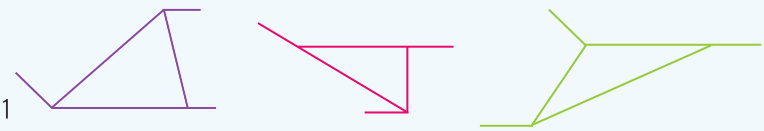


РИСУНОК 11

3. a) Начертите прямоугольный равнобедренный треугольник MNK. Укажите его внутренние и внешние углы. Определите градусные меры этих углов.

b) Начертите равносторонний треугольник ABD. Укажите его внутренние и внешние углы. Определите градусные меры этих углов. Какой результат вы получили?

4. Найдите x по рисункам 12 (a, b, c, d, e).

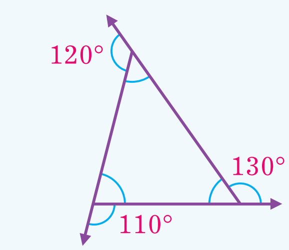


РИСУНОК 12, a

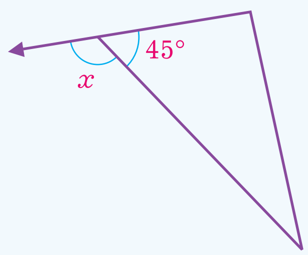


РИСУНОК 12, b

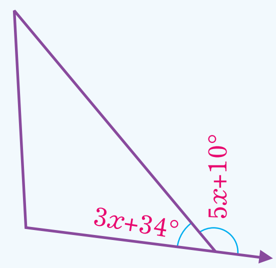
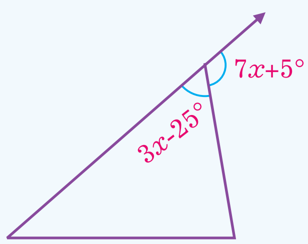


РИСУНОК 12, c

РИСУНОК 12, d



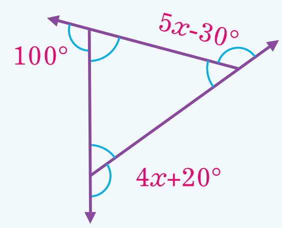


РИСУНОК 12, e

II. СУММА ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

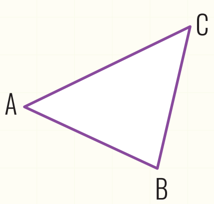


РИСУНОК 13

Следующее свойство выполняется для всех треугольников.

ТЕОРЕМА: **Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.**

В треугольнике ABC на рисунке 13 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Может ли треугольник иметь: **a)** два острых угла; **b)** два прямых угла; **c)** два тупых угла; **d)** один тупой и один прямой угол? Почему? Обоснуйте.

2. **a)** Назовите вид углов прямоугольного треугольника. Что можете сказать о сумме двух не прямых углов прямоугольного треугольника? Какое из утверждений верно: **1)** эта сумма больше 90°; **2)** эта сумма меньше 90°, **3)** эта сумма равна 90°.

b) Чему равны углы равностороннего треугольника?

3. Начертите в тетради произвольный треугольник. Измерьте транспортиром его внутренние углы. Определите суммы внутренних углов.

4. На каком рисунке углы указаны верно и почему? (рисунки 14 a, b, c, d).

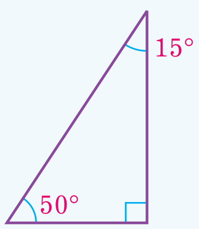


РИСУНОК 14, a

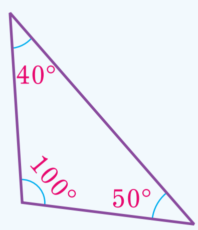


РИСУНОК 14, b

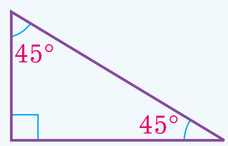


РИСУНОК 14, c

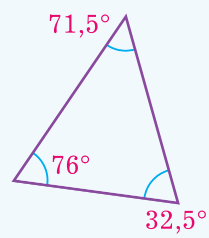


РИСУНОК 14, d

5. Могут ли заданные углы быть внутренними углами треугольника? Почему? Ответ объясните.

a) $21°, 35°$ и $121°$; **b)** $56°, 90°$ и $24°$; **c)** $72°, 15°$ и $55°$;
d) $15°, 62°$ и $103°$; **e)** $32°, 85°$ и $67°$; **f)** $95°, 102°$ и $4°$.

6. Даны два внутренних угла треугольника. Найдите третий угол.

a) $65°$ и $43°$; **b)** $90°$ и $29°$; **c)** $5°$ и $55°$;
d) $145°$ и $12°$; **e)** $100{,}4°$ и $52°$; **f)** $45°$ и $67{,}8°$.

7. Определите градусную меру внутренних углов треугольника ABD на рисунках 15 a, b, c. Здесь $DK \parallel AB$.

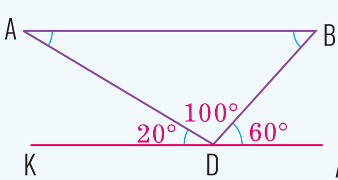


РИСУНОК 15, a

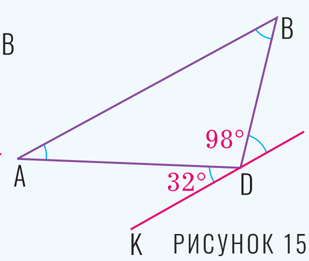


РИСУНОК 15, b

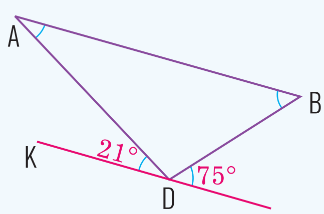


РИСУНОК 15, c

8. Найдите x на рисунках 16.

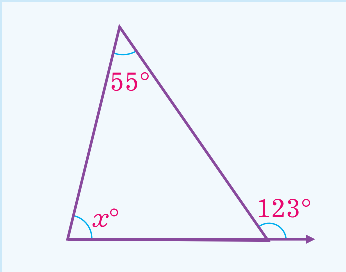


РИСУНОК 16, a

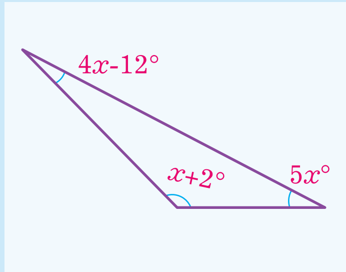


РИСУНОК 16, b

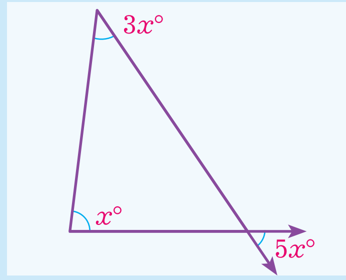


РИСУНОК 16, c

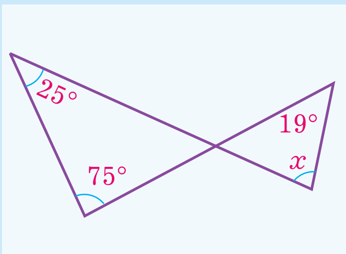


РИСУНОК 16, d

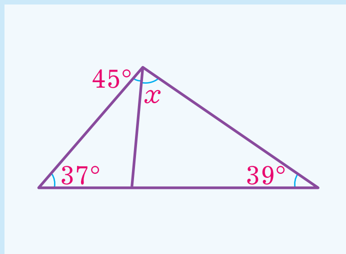


РИСУНОК 16, e

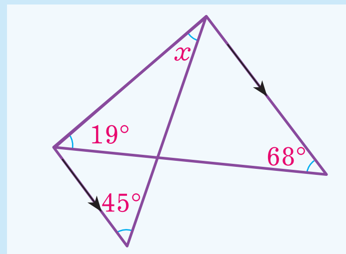


РИСУНОК 16, f

9. По данным таблицы найдите углы ΔABC:

$\angle A$	$30°$	$54°$	x	b	5 *м*
$\angle B$	n	a	$x + 72°$	$b + 15°$	2 *м*
$\angle C$	$n + 20°$	$a - 40°$	$2x$	$3b$	$40°$

III. СВОЙСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА

Внешний угол треугольника обладает следующим свойством:

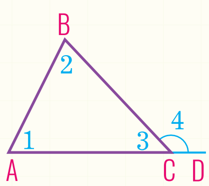


РИСУНОК 17

ТЕОРЕМА: Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних несмежных с ним углов треугольника.
В треугольнике ABC $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ (рисунок 17).

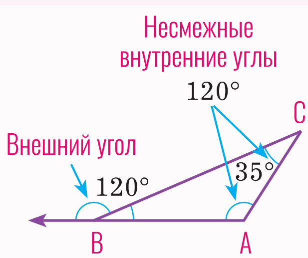


РИСУНОК 18

ПРИМЕР: Внешний угол ΔABC при вершине B треугольника равен $120°$ и один из внутренних углов, несмежных с ним, равен $35°$. Найдите другие углы треугольника (рисунок 18).

РЕШЕНИЕ: Так как внутренний и внешний углы при вершине B являются смежными, то их сумма равна $180°$. В силу того, что внешний угол при вершине B равен $120°$, то внутренний угол будет равен $60°$. Кроме того, по теореме сумма углов $\angle A$ и $\angle C$ равна $120°$, тогда $\angle A = 120° - \angle C = 120° - 35° = 85°$.

Ответ: $60°$, $85°$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Начертите треугольник ABC. Изобразите при каждой его вершине внешний угол. Покажите, сумме каких внутренних углов равен каждый внешний угол.

2. На рисунке 19 изображён ΔABC. При вершине B внешним углом по мнению Гюльнар, является $\angle ABD$, по мнению Али – $\angle CBE$, по мнению Юсифа – $\angle DBE$. По-вашему, кто из них верно изобразил внешний угол при вершине B? Что вы можете сказать о $\angle ABD$ и $\angle CBE$?

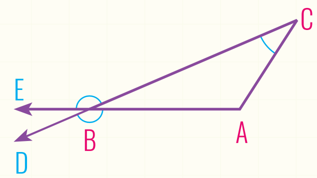


РИСУНОК 19

3. Если в треугольнике MNK внутренний угол при вершине M будет равен:

a) $87°$; b) $52°$; c) $164°$,

то чему будет равен соответствующий внешний угол?

4. Определите отмеченные знаком «?» углы на рисунке 20.

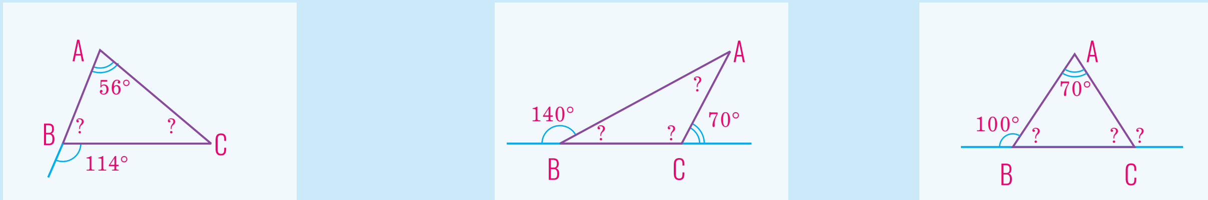


РИСУНОК 20

5. Внешний угол треугольника равен 60°. Отношение этого внешнего угла к одному из несмежных с ним внутренних углов треугольника 5:3. Определите углы треугольника.

6. Угол BCD – внешний угол ΔABC. Заполните таблицу.

Угол	a)	b)	c)	d)
$\angle A$	23°		78°	12,5°
$\angle B$	65°	72°		
$\angle C$		52°		81,3°
$\angle BCD$			145°	

7. Найдите внутренние углы равнобедренного треугольника, если один из внешних углов будет равен:

a) $60°$; b) $167°$

Проверьте себя

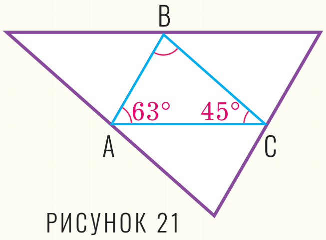


РИСУНОК 21

8. В треугольнике ABC $\angle A = 63°$, $\angle C = 45°$ (рисунок 21). Из вершин треугольника ABC к сторонам проведены параллельные прямые. Определите внутренние и внешние углы треугольников, образованных этими прямыми.

9. Сабина утверждает, что сумма внутренних углов треугольника в 4 раза меньше суммы всех внешних углов этого треугольника (при одной вершине берётся по 2 внешних угла). Права ли она?

IV. СО ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

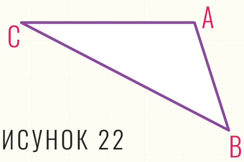


РИСУНОК 22

Какая сторона лежит напротив $\angle A$ в треугольнике ABC на рисунке 22? Назовите стороны, лежащие напротив $\angle B$ и $\angle C$.

Что вы подразумеваете, когда говорите об угле, лежащем напротив стороны, и о стороне, лежащей напротив угла?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА: Начертите разносторонний треугольник ABC.

a) Измерьте транспортиром углы треугольника.
b) Запишите углы в порядке возрастания градусных мер.
c) Измерьте линейкой длины сторон AB, AC и BC.
d) Расположите стороны в порядке возрастания длин.
e) Какие соотношения между углами и сторонами треугольника вы установили?

Между сторонами и углами треугольника верны следующие отношения:

ТЕОРЕМА: В треугольнике:
1) Напротив большей стороны лежит больший угол;
2) Напротив большего угла лежит большая сторона.

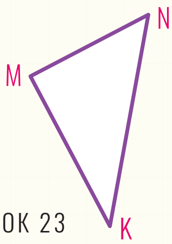


РИСУНОК 23

В $\angle MNK$ на рисунке 23:
$\angle M > \angle N > \angle K$ при условии $NK > MK > MN$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите в приведённых на рисунке 24 треугольниках угол, лежащий напротив каждой стороны, и сторону, лежащую напротив каждого угла.

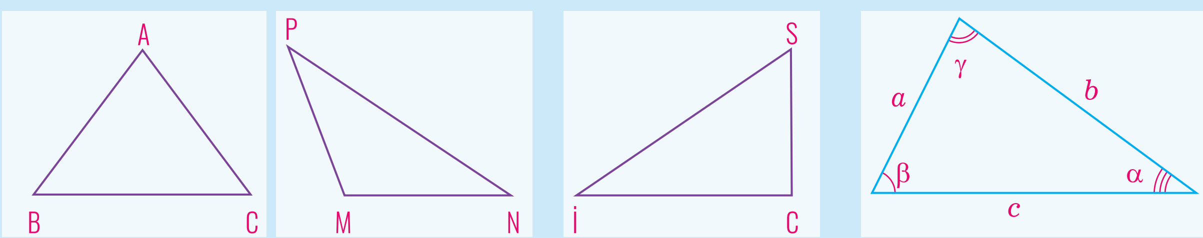


РИСУНОК 24

2. Расскажите об отношениях между сторонами и углами, определите вид треугольника.

a) ABC, если $AB > AC > BC$;

b) MNK, если $MN = MK < NK$;

c) CDE, если $CD = DE = CE$;

d) прямоугольного равнобедренного.

3. a) Сравните стороны треугольника MNK, если $\angle M < \angle K < \angle N$.

b) Расположите углы ABC в порядке возрастания, если $AB = 9$ см, $AC = 14$ см, $BC = 8$ см.

4. Какая из сторона наибольшая в прямоугольном треугольнике? Если один из острых углов $34°$, определите наименьшую сторону этого треугольника.

5. Дилара и Фарид начертили равнобедренный треугольник ABC с углом A равным 70°. Дилара утверждает, что в этом треугольнике сторона BC больше сторон AB и AC, Фарид же утверждает, что стороны AB и BC имеют равные длины и больше стороны AC. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ.

6. Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке M, сторону AC – в точке N. Определите вид треугольника MAN.

Проверьте себя

7. Треугольника ABC – равнобедренный. Докажите, что отрезок BD:

a) больше (рисунок 25, a) боковой стороны треугольника ABC;

b) меньше (рисунок 25, b) боковой стороны треугольника ABC.

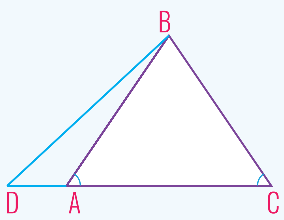


РИСУНОК 25, a

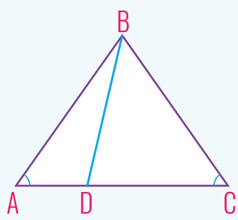


РИСУНОК 25, b

V. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Между длинами сторон треугольника существует нижеследующее соотношение, которое называется «**неравенством треугольника**»:

ТЕОРЕМА: **Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон.**

$\mathbf{MN} < MK + NK$, $\mathbf{MK} < MN + NK$, $\mathbf{NK} < MK + MN$.

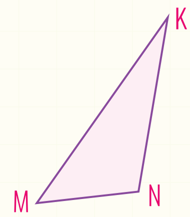


РИСУНОК 26

ВНИМАНИЕ:

Чтобы проверить соблюдение неравенства треугольника, достаточно проверить то, что сумма двух меньших сторон больше наибольшей третьей стороны.

Запомни:

Длина любой стороны треугольника больше разности длин других двух сторон.

Как бы вы решили задание, применяя разность длин сторон?

ПРИМЕР: Можно ли построить треугольник со сторонами:

a) 6 см, 12 см, 5 см;

b) 3,5 дм, 5,4 дм, 70 см;

c) 3 м, 8 м, 5 м?

РЕШЕНИЕ: Проверим во всех трёх случаях выполнение неравенства треугольника. Из этих отрезков треугольник получится в том случае, если сумма двух меньших отрезков будет больше третьего отрезка:

a) $6 + 5 < 12$, так как в первом случае сумма двух меньших отрезков меньше длины третьего отрезка, эти отрезки не могут быть сторонами какого-либо треугольника.

b) Так как $3{,}5 + 5{,}4 > 7$, эти отрезки могут быть сторонами треугольника.

c) Так как $3 + 5 = 8$, эти отрезки не могут быть сторонами треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

1. С помощью каких трех из заданных на рисунке 27 отрезков можно построить треугольник?

РИСУНОК 27

2. Существует ли треугольник с данными длинами сторон?

a) 111 см, 13 см, 10 см;

b) 2,4 мм; 4,9 мм; 2,1 мм;

c) 19 см; 4 дм; 25 см;

d) 0,8 дм; 8 см; 20 мм.

e)

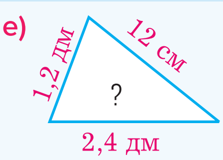


РИСУНОК 27

3. В ячейку таблицы, указывающую длину третьей стороны, запишите такое число, чтобы треугольник ABC: a) можно было построить; b) невозможно было построить.

AB	56 мм		$1\frac{3}{4}$ см	400 см
AC	38 мм	1,5 дм		5,9 м
BC		15 см	$6\frac{3}{4}$ см	

4. Практическая работа: Измерьте длины сторон треугольников на рисунке 29. Сравните разность длин двух любых сторон с длиной третьей стороны. Какой результат получен вами? Запишите этот результат с помощью неравенства.

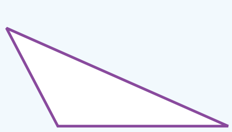


РИСУНОК 29, a

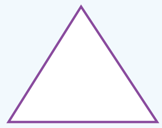


РИСУНОК 29, b

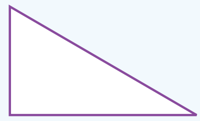


РИСУНОК 29, c

5. Можно ли построить треугольник с длинами сторон, равными нижеуказанным частям 180° см:

a) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$;   b) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$;   c) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}$.

6.a) Найдите периметр равнобедренного треугольника, если длины двух его сторон равны

1) 8 см и 16 см;   **2)** 5 дм и 22 см;

3) 70 мм и 3 см 1 мм.

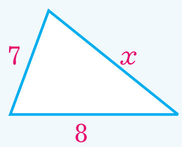


РИСУНОК 30, a

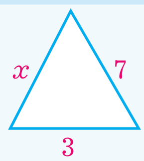


РИСУНОК 30, b

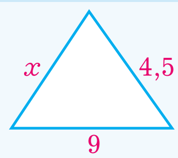


РИСУНОК 30, c

b) Найдите x в треугольниках на рисунке 30

7. Периметр треугольника равен 45см. Может ли одна из его сторон иметь длину 2дм 8см? Почему? Обоснуйте.

8. a, b и c стороны треугольника. $a = 3{,}17$ см, $b = 0{,}75$ см и c натуральное число. Определите периметр треугольника.

9. Утром ученик прошел из дома в школу, после уроков – из школы в книжный магазин, и оттуда домой (рисунок 31). Какое из расстояний дом – школа или школа – магазин – дом больше? Почему? Какое условие выполнено?

Как по-вашему, с какой целью применяется неравенство треугольника?

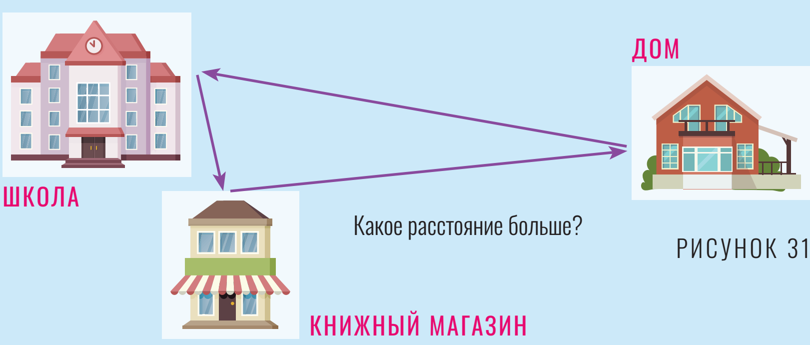


РИСУНОК 31

10. На некотором участке дороги из села Тогоналы до города Келбаджар спланировано провести тунель под горой Муровдаг. С одного конца тунеля до вершины горы протяженность составляет 15,2 км, с другого конца – 16,3 км.

a) Какой могла бы быть наибольшая длина тунеля (в целых числах)?

b) Если длина тунеля будет 11,6 км, то на сколько сократится длина трассы?

11. AB = 7,2 см, AC = 18,2 см, DB = 4,5 см и DC = 6,5 см. Можно ли утверждать, что точки A, B, C, D расположены на одной прямой?

УКАЗАНИЕ:
Рассмотрите сумму чисел с левых сторон и с правых сторон двойных неравенств.

12. Стороны a и b треугольника отвечают условию $8 < a < 12$, $10 < b < 15$. Между какими двумя ближайшими целыми числами будет располагаться длина третьей стороны?

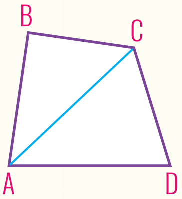


РИСУНОК 32

13. На рисунке 32 дан четырёхугольник ABCD. Докажите, что длина отрезка AC меньше половины периметра четырёхугольника ABCD.

14. Стороны a, b и c треугольника отвечают условию:

$3{,}1 < a < 7{,}4;$ $\quad 8{,}2 < b < 13,$ $\quad 11 < c < 17{,}5$

Какому наибольшему натуральному числу может быть равен периметр этого треугольника?

15. В каком промежутке находится натуральное число x для треугольников на рисунках 33 (a, b, c)?

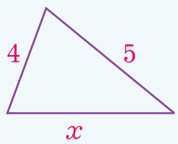


РИСУНОК 33, a

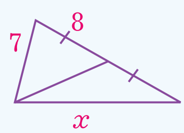


РИСУНОК 33, b

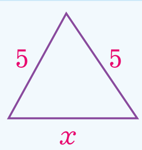


РИСУНОК 33, c

Проверьте себя

УГОЛ: ГРАДУС, МИНУТА, СЕКУНДА.

Угол измеряется в градусах (°), минутах (′) и секундах (″):

$1° = 60'$, $\quad 1' = 60''$, $\qquad 1' = \dfrac{1°}{60}$; $\qquad 1'' = \dfrac{1'}{60} = \dfrac{1°}{3600}$.

Например: $12°39'$ (двенадцать градусов тридцать девять минут);
$72°15'43''$ (72 градусов 15 минут 43 секунды);
$45{,}6°$ (45 целых 6 десятых градуса).

Можно переводить градусы в минуты и секунды и наоборот

ПРИМЕР 1: $42{,}5° = 42° + 0{,}5° = 42° + 0{,}5 \cdot 60' =$
$= 42° + 30' = 42°30'$

РЕШЕНИЕ: $27°15'56'' = 27° + 15' + 56'' = 27° + 15 \cdot \dfrac{1°}{60} + 56 \cdot \dfrac{1°}{3600} \approx$
$\approx 27° + 0{,}25° + 0{,}02° = 27{,}27°$.

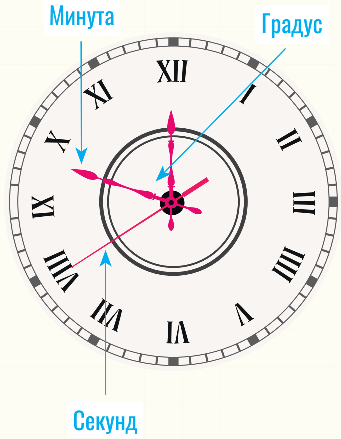
УПРАЖНЕНИЯ

1. **a)** Выразите в минутах: $12°15'$, $4{,}7°$, $34°42''$.
b) Выразите в секундах: $6°22'$, $59°$, $39'$.
c) Запишите в градусах: $200'$, $630'$.

2. **a)** Запишите меру угла в градусах, минутах и секундах.
1) $73{,}4°$; **2)** $66{,}2°$; **3)** $125{,}1°$;
4) $41{,}93°$; **5)** $12{,}5°$.

b) Запишите углы в градусах:
1) $12°36'$; **2)** $44°16'25''$; **3)** $54°30''$;
4) $135°56'10''$; **5)** $49°49''$.

3. Выполните действия:
a) $17°15' + 16°40'$; **b)** $79°25' - 56°57''$;
c) $162°13'25'' + 32°19'51''$; **d)** $42° - 25°10''$;
e) $75°17' - 11°53''$; **f)** $98°15'' - 53°45'$;
g) $46°45' \cdot 3$; **h)** $78{,}5° - 16°7' + 23{,}6°$;
k) $49°14'' : 7$; **m)** $125{,}40° : 5$.



Запомните:
Меры углов можно складывать, вычитать, умножать и делить на число.

ОБРАЗЕЦ:

1) $7°15' + 16°30' = 23°45'$;

2) $175°13' - 101°43'' =$
$= 175°12'60'' - 101°0'43'' =$
$= 74°12'17''$;

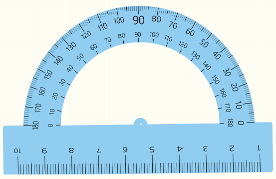
3) $23°36' \cdot 2 = 46°72' =$
$= 47°12'$;

4) $72°24'36'' : 3 = 24°8'12''$.

РАЗДЕЛ 5

3 Элементы треугольника: биссектриса, медиана, высота.

Вспомните: Стороны угла, обозначение, виды углов



Каким инструментом измеряют угол?

РИСУНОК 35, a

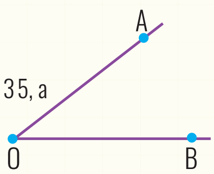


РИСУНОК 35, b

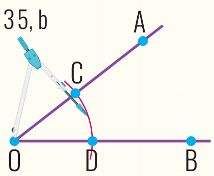


РИСУНОК 35, c

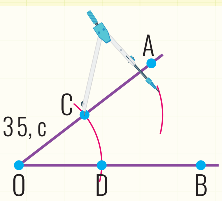


РИСУНОК 35, d

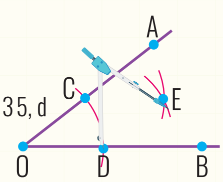
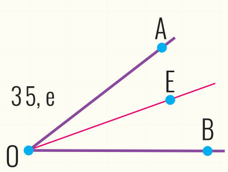


РИСУНОК 35, e



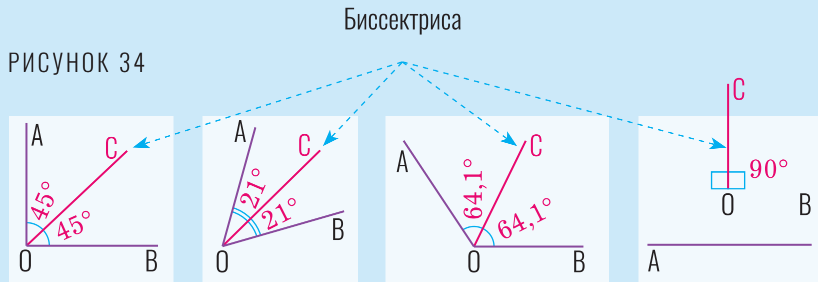
I. ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Биссектриса угла – это луч, исходящий из вершины угла и делящий угол на два конгруэнтных угла (рисунок 34)

Для нижеуказанных углов луч OD является биссектрисой.

Для каждого угла: $\angle AOD \cong \angle BOD$.

РИСУНОК 34



прямой угол острый угол тупой угол развернутый угол

Чтобы показать на рисунке 34, что луч ОД является биссектрисой, полученные конгруэнтные углы отмечены одинаковыми обозначениями в виде дуг.

С помощью циркуля и линейки можно построить биссектрису угла. Выполним алгоритм этого построения:

1) Начертите произвольный угол AOB (рисунок 35a).

2) Поместите иглу циркуля в точку O и начертите дугу, пересекающую стороны угла (рисунок 35b). Обозначьте эти точки пересечения как C и D.

3) Не меняя расстояние между концами циркуля, проведите дугу внутри угла (рисунок 35c) с центром в точке C.

4) Не меняя расстояние между концами циркуля, провезите вторую дугу внутри угла с центром в точке D. Обозначьте точку пересечения дуг через E (рисунок 35, d).

5) Проведите луч OE из вершины O. Луч OE является биссектрисой угла AOB (рисунок 35, e).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте биссектрисы углов $40°$, $70°$, $90°$, $110°$, $150°$ с помощью циркуля и линейки. Объясните ваши действия. Измерьте полученные углы транспортиром. Выясните точность построения.

2. Постройте биссектрисы углов $46°$, $65°$, $98°$, $163°$ с помощью циркуля и линейки. Исследуйте результат построения.

II. БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противоположной стороне.

AM биссектриса угла A

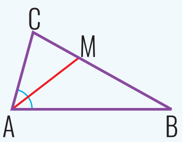


РИСУНОК 35, a

BN биссектриса B

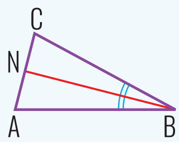


РИСУНОК 35, b

CK биссектриса C

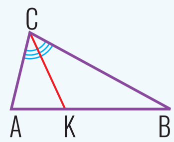


РИСУНОК 35, c

Треугольник имеет три биссектрисы (AM, BN, CK) и они пересекаются в одной точке O (рисунок 36).

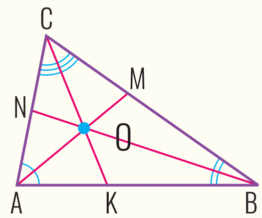


РИСУНОК 36

ПРИМЕР: AM, BN и CK биссектрисы треугольника ABC. $\angle BAM = 35°$, $\angle ABN = 42°$, найдите углы треугольника ABC.

РЕШЕНИЕ: По свойству биссектрисы, в силу того, что
$\angle BAM \cong \angle CAM = 35°$, $\angle ABN \cong \angle CBN = 42°$,
$\angle BAC = 2 \cdot 35° = 70°$ и $\angle ABC = 2 \cdot 42° = 84°$.
Так как сумма внутренних углов треугольника равна $180°$, то $\angle ACB = 180° - (70° + 84°) = 26°$.

Ответ: $84°$, $70°$, $26°$

Какова связь между числом углов и числом биссектрис треугольника?

Запомните:
Чтобы убедиться в том, что отрезки AM, BN и CK являются биссектрисами, достаточно показать, что
$\angle BAM \cong \angle CAM$,
$\angle ABN \cong \angle CBN$,
$\angle BCK \cong \angle ACK$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. ND – биссектриса острого угла MNK. $\angle MND = 45{,}8°$, Найдите градусные меры углов MNK и DNK.

2. BE – биссектриса треугольника ABC. $\angle B = 96°$. Найдите градусные меры углов ABE и CBE.

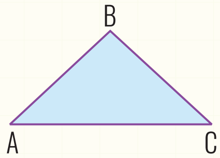


РИСУНОК 37, a

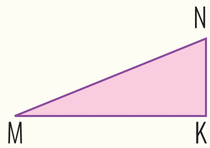


РИСУНОК 37, b

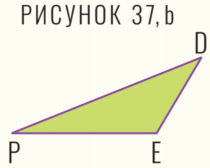


РИСУНОК 37, c

3. С помощью циркуля и линейки постройте биссектрисы углов остроугольного ABC, прямоугольного MNK и тупоугольного PDE треугольников. Выясните, где находится точка пересечения биссектрис (рисунок 37).

4. По рисунку 38 определите с помощью транспортира углы ABK, BCM, CAN. Укажите равные им углы. Запишите биссектрисы.

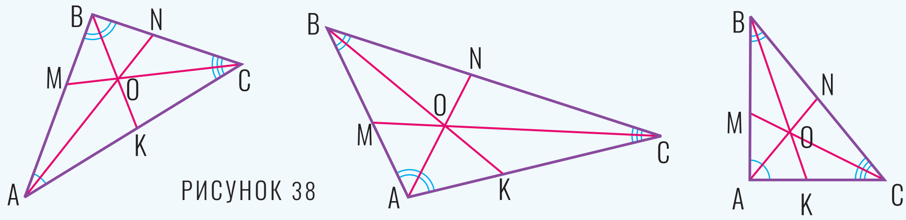


РИСУНОК 38

III. МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противолежащей этой вершине стороны (рисунок 39, 40, 41).

Отрезок, соединяющий вершину A с серединой стороны BC – медиана AM.

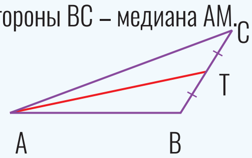


РИСУНОК 39

Отрезок B серединой стороны AC – медиана BN.

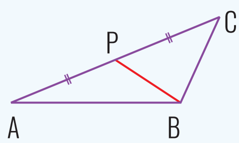


РИСУНОК 40

Отрезок вершину C с серединой стороны AB – медиана CF

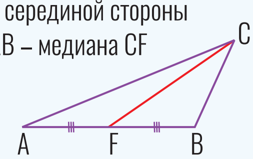


РИСУНОК 41

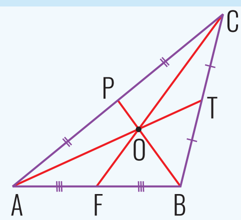


РИСУНОК 42

Чтобы показать, что рассматриваемый отрезок является медианой, конгруэнтные отрезки, на которые разбивается сторона треугольника медианой, обозначают одинаковыми штрихами (рисунок 39, 40, 41).

Треугольник имеет три медианы (рисунок 42) AT, BP, CF, которые пересекаются в одной точке внутри треугольника (точка O).

Запомните:

Чтобы убедиться в том, что AT, BP и CF – медианы, достаточно показать, $BT \cong CT$, $AP \cong CP$, $AF \cong BF$.

ПРИМЕР: В треугольнике ABC (рисунок 42) AT, BP, CF медианы. AP=4,3 см, AF=2,1 см və CT = 5,6 см, Найдите периметр треугольника ABC.

РЕШЕНИЕ: Так как AT, BP, CF медианы, то

$AC = 2 \cdot AP = 2 \cdot 4{,}3 = 8{,}6$ см, $AB = 2 \cdot AF = 2 \cdot 2{,}1 = 4{,}2$ см,

$BC = 2 \cdot CT = 2 \cdot 5{,}6 = 11{,}2$ см.

Тогда $P_{\Delta ABC} = 8{,}6 + 4{,}2 + 11{,}2 = 24$ см.

Ответ: 24 см.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Начертите прямоугольный, остроугольный и тупоугольный треугольники. С помощью линейки постройте медианы этих треугольников.

2. С помощью циркуля найдите середины сторон некоторого треугольника и проведите медианы. В каком случае по сравнению с 1-м заданием медианы построены более точно.

3. В треугольнике ABC AK, CM, BN медианы. $AN=3$ см, $BK=2{,}5$ см, $BM = 3{,}2$ см, Найдите периметр треугольника ABC.

4. Периметр равнобедренного треугольника MNK равен 56 дм, основание MN равно 18,4 дм. Найдите длины отрезков боковых сторон на которые разбивается каждая сторона медианой, проведенной к ней.

5. **Физика:** Постройте медианы треугольников, изображённых на рисунке 43 (a, b, c) и определите центр тяжести каждого треугольника. Подвесьте эти треугольники за центр тяжести на нити (рисунок 44). Что вы наблюдаете?

Запомните:
Центр тяжести тела – это точка, в которой сконцентрирована вся масса тела. Центр тяжести тела в форме треугольника находится в точке пересечения медиан треугольника.

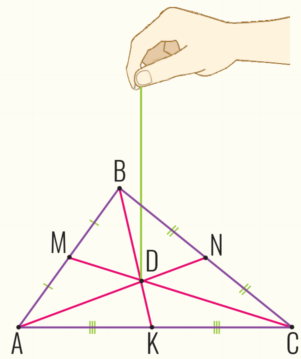


РИСУНОК 44

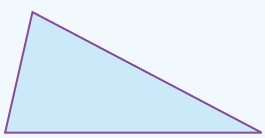


РИСУНОК 43, a

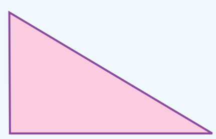


РИСУНОК 43, b

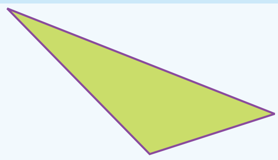


РИСУНОК 43, c

IV. ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

Высота треугольника – это перпендикулярный отрезок проведённый из вершины треугольника к противоположной стороне (рисунок 45, 46, 47).

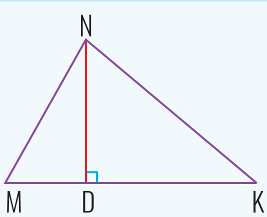


РИСУНОК 45

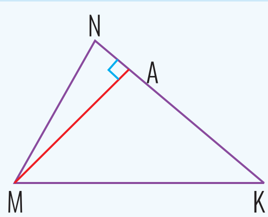


РИСУНОК 46

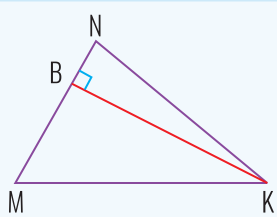


РИСУНОК 47

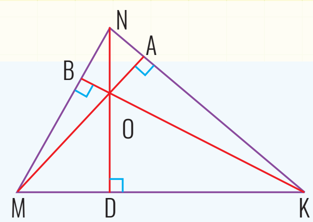


РИСУНОК 48

Любой треугольник имеет три высоты, которые пересекаются в одной точке (рисунок 48). Чтобы убедиться в том, что данные отрезки на рисунке 48 MA, KB и ND являются высотами треугольника MNK, надо показать, что $MA \perp NK$, $ND \perp MK$ и $KB \perp MN$. В отличие от биссектрис и медиан точка пересечения высот может находиться внутри, вне или же на самом треугольнике.

ПОСТРОИМ ВЫСОТЫ ПО СЛЕДУЮЩЕМУ АЛГОРИТМУ:

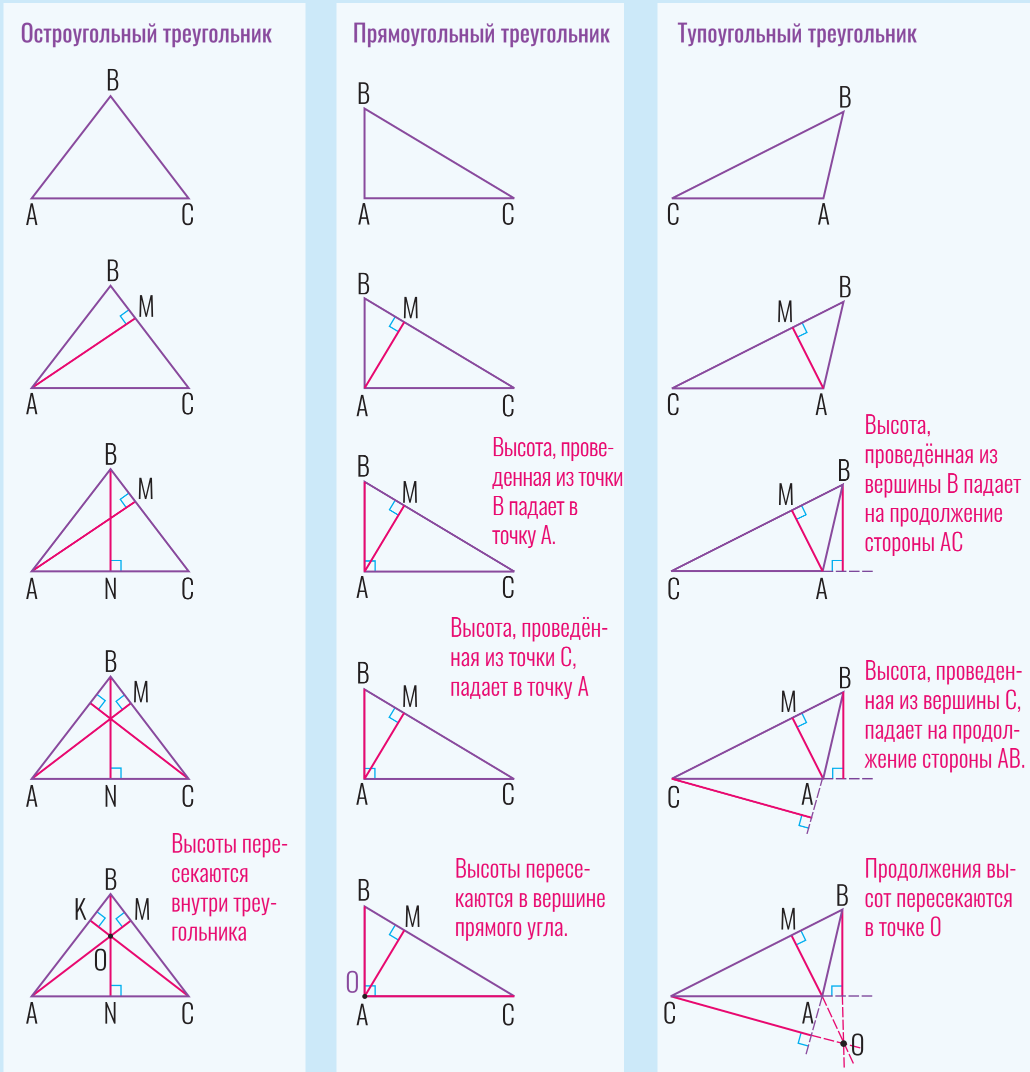
Начертите треугольник ABC

С помощью угольника проведите перпендикуляр из вершины A к стороне BC

С помощью угольника проведите перпендикуляр из вершины B к стороне AC;

С помощью угольника проведите перпендикуляр из вершины C к стороне AB;

Найдите точку пересечения высот.



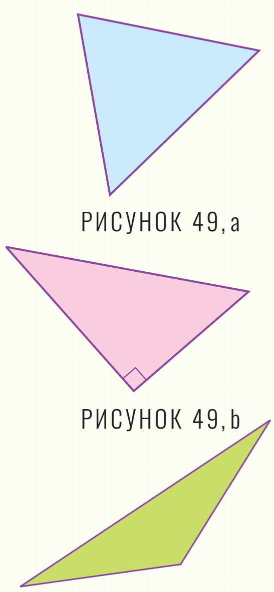


РИСУНОК 49, a

РИСУНОК 49, b

РИСУНОК 49, c

ВЫВОД 1: Точка пересечения высот остроугольного треугольника находится внутри треугольника

ВЫВОД 2: Точка пересечения высот прямоугольного треугольника является вершиной прямого угла этого треугольника. Катеты прямоугольного треугольника являются также его высотами.

ВЫВОД 3: Точка пересечения высот тупоугольного треугольника находится в треугольнике.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Отметьте буквами вершины треугольника и постройте их высоты (рисунок 49). Укажите вид угла, из вершины которого проведённая высота проходит внутри или вне треугольника.

2. В треугольнике ABD проведены биссектриса AT, высота BH и медиана DM. Дополните предложения:

a) так как AT – биссектриса, то $\angle BAT = \ldots$

b) так как DM – медиана, то $BM \ldots$

c) так как BH высота, то ... перпендикулярны.

В каждом предложении поменяйте условие и утверждение. Проверьте истинность полученных предложений.

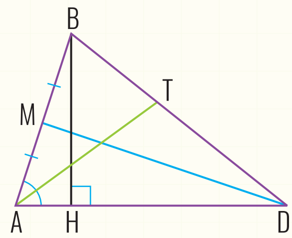


РИСУНОК 50

3. По рисунку 50. Найдите:

a) $\angle BAD$, если $\angle BAT = 24°$; b) AB, если $BM = 16{,}7$ см;

c) $\angle BHD$, если $BH \perp AD$.

4. Начертите остроугольный треугольник. Опустите из какой-нибудь вершины:

a) медиану; b) биссектрису; c) высоту.

Сравните их длины.

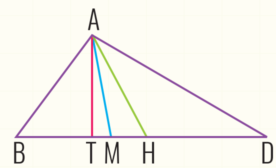


РИСУНОК 51

5. Постройте медиану, биссектрису и высоту, исходящие из вершины тупого угла тупоугольного треугольника (рисунок 51). Как по-вашему верно ли утверждение, что AM – медиана, AH – высота и AT – биссектриса? Если ошибочно, то дайте правильный ответ.

6. a) Начертите прямоугольный треугольник и опустите из вершины прямого угла высоту, биссектрису и медиану

b) В треугольника ABC. $\angle B = 90°$. BK – высота. Определите вид углов ABK и CBK.

7. Начертите треугольник, один из углов которого равен $120°$. Изобразите высоту, проведённую из вершины острого угла.

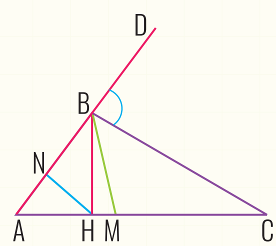


РИСУНОК 52

8. Из вершины прямого угла a треугольника ABC проведены биссектриса AN и высота AH. Найдите сумму углов NAC и AHC.

9. В треугольнике ABC $\angle DBC = 78°$, BH – высота, BM – биссектриса (рисунок 52). HN – биссектриса угла АНВ. Найти разность углов CBM и BHN.

Обобщающие задания

1. Угол N в тупоугольном треугольнике MNK равен $130°$. Объясните, какой из нижеуказанных утверждений верен:

a) Высота, опущенная из вершины N на сторону MK, проходит внутри треугольника;

b) Высота, опущенная из вершины M на сторону NK, проходит внутри треугольника;

c) Высота, опущенная из вершины K на сторону MN, проходит вне треугольника.

d) Высоты треугольника MNK пересекаются вне треугольника.

2. a) Высота треугольника делит угол при вершине из которого она исходит, на два угла $30°$ и $42°$. Найдите углы этого треугольника.

b) Найдите другие углы равнобедренного треугольника, если один из углов равен **1)** $68°$; **2)** $136°$; **3)** 100°.

3. Один из углов треугольника равен $60°$. Чему равен острый угол между биссектрисами других двух углов?

4. Угол между биссектрисами углов B и C треугольника ABC равен $118°$. Чему равен $\angle A$ треугольника.

5. В треугольнике ABC $\angle A = 70°$ и $\angle C = 60°$. Биссектриса BD треугольника ABC делит его на два треугольника ABD и BCD. Найдите углы этих треугольников.

6. В треугольнике ABC $\angle B = 110°$, $\angle C = 50°$, AD – высота. Докажите, что $\angle CAD = 2 \cdot \angle BAD$.

7. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20 см, длина основания в 5 раз меньше периметра. Найдите длину основания в миллиметрах.

8. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 14 дм. Сумма длин боковых сторон и удвоенного основания равна 70 дм. Найдите периметр треугольника.

9. Основание равнобедренного треугольника равно $3{,}2$ см, что составляет 25% его периметра. Найдите боковую сторону треугольника.

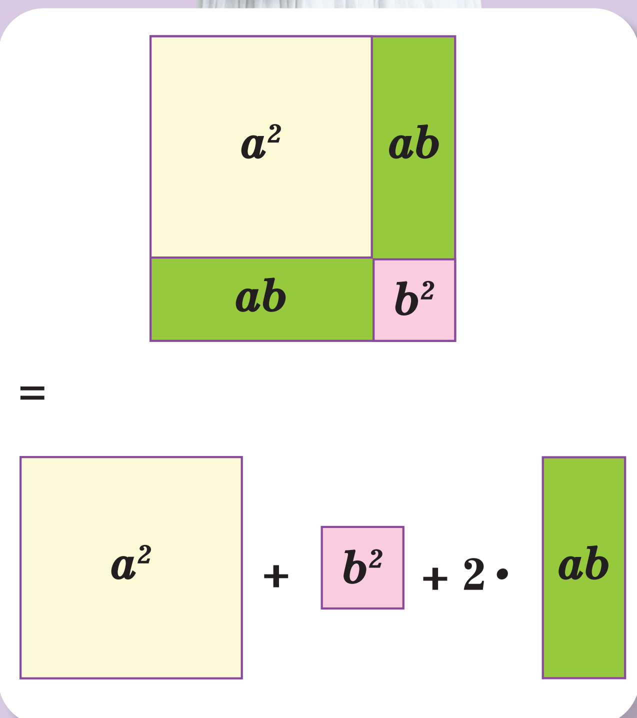
10. В равнобедренном треугольнике основание относится к боковой стороне как $3:4$, периметр меньше пятикратного основания на 78 см. Найдите периметр треугольника.

Проверьте себя

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

РАЗДЕЛ 6

В этом разделе вы изучите тождества, применяемые при преобразовании различных выражений. Эти тождества называются формулами сокращённого умножения. С помощью этих формул вы узнаете, как выражение с целой степенью представить в виде многочлена, и сможете разлагать многочлен на множители.



РАЗДЕЛ 6

1 Возведение двучлена в квадрат

Чтобы возвести число в квадрат или в куб необходимо это число умножить на себя два или три раза. Это правило выполняется и для буквенных выражений.

Исследуем как перемножить два одинаковых двучлена.

ИССЛЕДОВАНИЕ 1: Запишем произведение двучлена $(a + b)$ само на себя, то есть квадрат двучлена, в виде многочлена::

$$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Таким образом, $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ 2: Запишем произведение двучлена $(a – b)$ само на себя, то есть квадрат двучлена, в виде многочлена:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-b) =$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Таким образом, $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$.

Проведённые исследования привели к формулам квадрата двучлена:

Запомните:
Применяя эти формулы, представьте квадрат двучлена в виде многочлена.

$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$ – квадрат суммы двух выражений равен сумме их квадратов плюс удвоенное произведение этих выражений.

$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab}$ – квадрат разности двух выражений равен сумме их квадратов минус удвоенное произведение этих выражений.

Трехчлены $a^2 + b^2 + 2ab$ и $a^2 + b^2 - 2ab$ называются **полными квадратами**

ПРИМЕР: Запишите квадрат двучлена в виде многочлена:

1) $(5 + 3x)^2$; 2) $(0{,}2x - 1{,}5y)^2$

РЕШЕНИЕ: 1) $(5 + 3x)^2 = 5^2 + (3x)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3x = 25 + 9x^2 + 30x$.

2) $(0{,}2x - 1{,}5y)^2 = (0{,}2x)^2 + (1{,}5y)^2 - 2 \cdot (0{,}2x) \cdot (1{,}5y) =$
$= 0{,}04x^2 + 2{,}25y^2 - 0{,}6xy$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите квадраты двучленов:
a) $(x + 4)^2$; b) $(3 - a)^2$; c) $(1 - 2x)^2$; d) $(a + 5)^2$; e) $(b - 7)^2$.

2. Раскройте квадраты двучленов по формулам:
a) $(5y - 3x)^2$; b) $(0{,}3a - 4x)^2$; c) $(10c + 0{,}1b)^2$;
d) $(7p - k)^2$; e) $(12 + 8k)^2$; f) $(\frac{1}{3}x - y)^2$;
g) $(0{,}6 + 2x)^2$; h) $(0{,}2m + 5nb)^2$; k) $(12a - 0{,}3c)^2$.

3. Вместо троеточия впишите подходящие выражения:

a) $(a - ...)^2 = ...^2 - 2 ... b + b^2$; b) $(m - ...)^2 = m^2 - 20m + ...2$;

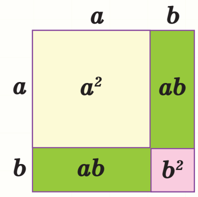
c) $(5 + ...)^2 = ... + ... + a^2$; d) $71^2 = 4900 + ... + 1$.

4. a) Диляра преобразовала выражение $(a - 3)^2$ в многочлен, Илаха – $(3 - a)^2$ Оба получили одинаковый результат. Как по-вашему, почему?

b) Исследуйте, являются ли равенства тождествами:

1) $(2k - 5)^2 = (5 - 2k)^2$; 2) $(11 + 3x)^2 = (-11 - 3x)^2$;

3) $(y - 2x)^2 = (-2x + y)^2$.



$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

РИСУНОК 1

5. На основе модели рисунка 1 запишите площади нижеследующих фигур в виде многочленов:

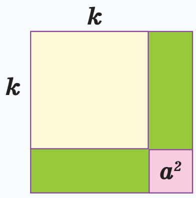


РИСУНОК 2, a

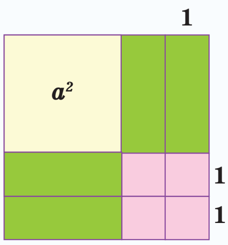


РИСУНОК 2, b

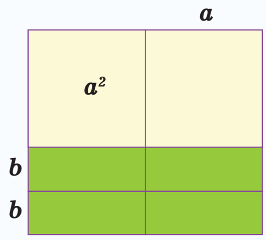


РИСУНОК 2, c

ВНИМАНИЕ:

Геометрический смысл квадрата двучлена: площадь прямоугольника равна сумме площадей прямоугольников и квадратов на которые он разбивается.

6. Закир и Эльдар обсуждали текущую тему по математике. Закир похвастался, что может устно быстро вычислять квадраты двузначных и трёхзначных чисел. Засомневавшись в его способностях, Эльдар предложил ему вычислить 492. Подумав несколько секунд, Закир дал ответ: 2401. Как по-вашему, каким способом он произвёл вычисления? Применяя этот же способ, постарайтесь устно вычислить следующие квадраты чисел. Результаты проверьте.

a) $(100 + 1)^2$; b) $(100 - 1)^2$; c) 61^2; d) 199^2; e) 999^2; f) 703^2;

g) $9{,}9^2$; h) $10{,}2^2$; k) 305^2; m) 1001^2; n) 599^2; l) $9{,}98^2$.

ОБРАЗЕЦ:

$49^2 = (50 - 1)^2 =$

$= 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 =$

$= 2500 - 100 + 1 = 2401$

7. a) поменяйте знаки переменных x и y в выражении $(x - y)^2$ так, чтобы полученное выражение тождественно равнялось $(x - y)^2$.

b) поменяйте знаки переменных x и y в выражении $(x + y)^2$ так, чтобы полученное выражение тождественно равнялось $(x + y)^2$.

8. a) Первый член двучлена равен x^2, второй равен 10. Преобразуйте в многочлен квадрат их суммы и разности.

b) Первый член двучлена равен 7, второй y^3. Преобразуйте в трёхчлен квадрат их суммы и разности.

c) Какой одночлен надо прибавить к выражению $(a + b)^2$ чтобы оно преобразовалось в $(a - b)^2$?

9. Запишите выражения в виде многочленов:

a) $(x^2 - 3x)^2$; b) $(c^2 - 0{,}7c^3)^2$; c) $\left(1\frac{1}{2}a^5 + 8a^2\right)^2$;

d) $\left(\frac{1}{2}x^3 + 6x\right)^2$; e) $(2y^3 - 0{,}5y^2)^2$; f) $\left(\frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}\right)^2$.

10. При каких значениях x:

a) значение квадрата $(x + 1)$ будет больше значения квадрата выражения $(x - 3)$ на 120 единиц?

b) квадрат выражения $(2x + 10)$ будет в 4 раза больше квадрата выражения $(x - 5)$?

11. Упростите выражения:

a) $(12m - 1)^2 - 2$; b) $12 - (11 - 7x)^2$; c) $a^2 + 49 - (a - 7)^2$;

d) $(2a + 6b)^2 - 24ab$; e) $a^2b^2 - (ab - 9)^2$; f) $a^4 - 81 - (a^2 + 9)^2$.

12. Упростите выражения:

a) $(x - 3)^2 + x(x + 9)$; b) $(b - 4)^2 + (b - 1)(2 - b)$;

c) $(2a + 5)^2 - 5(4a + 5)$; d) $9b(b - 1) - (3b + 2)^2$.

13. Упростите выражения и вычислите их значения при заданных значениях переменной.

a) $x = 0{,}97$ olduqda, $(x - 10)^2 - x(x + 8)$;

b) $x = -10$ olduqda, $(0{,}1x + 8)^2 + (0{,}1x - 8)^2$.

14. Решите уравнения:

a) $(x - 6)^2 - x(x + 8) = 2$; b) $(x - 5)^2 - x^2 = 3$;

c) $9x^2 - 1 - (3x - 2)^2 = 0$; d) $16y(2 - y) + (4y - 5)^2 = 0$;

e) $x + (5x + 2)^2 = 25(1 + x^2)$; f) $(3b - 1)^2 - 9b^2 = 7b - 2$.

15. Докажите тождества:

a) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$; b) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

c) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; d) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$.

e) $(2a + b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a + b)^2)$; f) $(ax - ay)^2 = a^2(x - y)^2$.

16. Покажите истинность следующих равенств:

a) $\dfrac{(a+3)^2 + (a-3)^2}{a^2 + 9} = 2$

b) $\dfrac{m^2 - 4 + (m+2)^2}{m^2 + 2m} = 2$

c) $\dfrac{(2b-5)^2 - (2b+5)^2}{(b^2 - 5b) - (b^2 - 7b)} = -20$

Доказать тождество означает показать равенство друг другу сторон этого тождества при любых значениях переменных.

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 6

2 Разложение трёхчлена на множители с помощью формулы квадрата двучлена

Так как равенства $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ и $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ являются тождествами, их правые и левые части можно поменять местами.

$$\boldsymbol{a^2+b^2+2ab=(a+b)^2;} \qquad \boldsymbol{a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.}$$

С помощью этих тождеств можно трёхчлен разложить на множители.

ПРИМЕР: Разложите на множители трёхчлен: $a^2-20ab^2+100b^4$.

РЕШЕНИЕ: Первое слагаемое есть квадрат a, третье – квадрат $10b^2$. Второе слагаемое равно удвоенному произведению a и $10b^2$. Тогда по формуле квадрата разности двух выражений имеем:

$$\boldsymbol{a^2-20ab^2+100b^4} = a^2-2\cdot a\cdot 10b^2+(10b^2)^2=(a-10b^2)^2=$$
$$=(a-10b^2)(a-10b^2)\ \boldsymbol{=(a-10b^2)^2}.$$

Ответ: $(a-10b^2)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представьте трёхчлены в виде квадрата двучлена и запишите в виде произведения двух одинаковых двучленов:

a) $x^2+8x+16$; b) $x^2-8x+16$;
c) $4x^2-12x+9$; d) $4x^2+12x+9$.

2. Представьте второе слагаемое в виде суммы двух одночленов, а затем разложите полученное выражение на множители способом группировки:

a) $81a^2+18ab+b^2$; b) $100x^2y^2-20xy+1$;
c) $49x^2+28xy+4y^2$; d) $25a^2-70ab+49b^2$;
e) $9c^2+24cd+16d^2$; f) $16-8a^2b^2+a^4b^4$.

3. Вместо троеточия впишите такой одночлен, чтобы полученный трёхчлен можно было бы представить в виде квадрата двучлена.

a) $\ldots+49+56a$; b) $36-12x+\ldots$;
c) $0{,}01b^2+\ldots+100c^2$; d) $25a^2+\ \ldots\ +\frac{1}{4}b^2$;
e) $\ldots-6ab+\frac{1}{9}b^2$; f) $\frac{1}{16}y^2-2xy+\ldots$.

4. Можно ли следующие выражения представить в виде квадрата двучлена? Если невозможно, то объясните почему. Какой одночлен следует прибавить к такому трёхчлену, чтобы полученное выражение обращалось бы в квадрат двучлена?

a) $a^2 + a + 1$; b) $14 + 8x + x^2$; c) $p^2 - 2p + 4$;
d) $25a^2 - 30ab + 9b^2$; e) $100b^2 + 16c^2 - 60bc$; f) $49x^2 + 12xy + 4y^2$.

5. Представьте многочлены в виде квадрата двучлена:

a) $x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$; b) $0{,}25x^2 + 2xy^2 + 4y^4$;
c) $\frac{1}{16}a^4 + 2a^2b + 16b^2$; d) $m^2n^2 - 2mn^4 + n^6$.

6. Вместо фигур впишите такой одночлен, чтобы полученное равенство стало тождеством.

a) $(5x + \blacktriangleright)^2 = \blacktriangledown + 70xy + \blacksquare$; b) $(9a - \blacktriangleright)^2 = \blacktriangledown - \bullet + 100b^2$;
c) $(\blacktriangleright + 10a)^2 = \blacktriangledown - 60an + \blacksquare$; d) $(\blacktriangleright - \blacksquare)^2 = 25m^2 + 80mn + \bullet$.

7. Вычислите, применяя формулу квадрата двучлена:

a) $15^2 + 2 \cdot 15 \cdot 11 + 11^2$; b) $71^2 - 2 \cdot 71 \cdot 25 + 625$;
c) $101^2 - 202 \cdot 81 + 81^2$; d) $2 \cdot 55 + 25 + 121$;
e) $67^2 + 2 \cdot 67 \cdot 45 + 2025$; f) $-3600 - 2 \cdot 720 - 144$.

8. Исследование: Самед считает 1 наименьшим значением трёхчлена $x^2 + 6x + 10$ Как по-вашему, почему? Определите, выделением квадрата двучлена, наименьшее или наибольшее значение данных трёхчленов (НМЗ или НБЗ)?

ОБРАЗЕЦ: Чтобы найти наименьшее значение трёхчлена $a^2 + 14a + 10$ заметим, что $14a = 2 \cdot 7 \cdot a$. 7 и a – слагаемые двучлена. В записи a^2 имеется. Чтобы получить полный квадрат создадим слагаемое $7^2 = 49$:
$\mathbf{a^2 + 14a + 10 = a^2 + 14a + 49 - 39 = (a + 7)^2 - 39}$.

Наименьшее значение этой разности достигается при наименьшем значении уменьшаемого $(a+7)^2$, равном 0. (Почему?). Тогда наименьшее значение заданного трёхчлена равно – 39: **НМЗ = – 39.**

a) $a^2 - 16a + 69$; b) $125 + 22x + x^2$; c) $-50 - 14b - b^2$;
d) $4y^2 - 4y + 6$; e) $a^2 + b^2 - 2ab + 2$; f) $9x^2 + 4 - 12xy + 4y^2$.

9. Обоснуйте, почему при любых значениях переменной значение многочлена всегда положительно.

a) $x^2 + 6x + 10$; b) $x^2 + 2x + 3$; c) $4y^2 - 4y + 6$;
d) $a^2 + b^2 + 2ab + 1$; e) $x^2 + y^2 - 2xy + 5{,}2$; f) $9x^2 + 4 - 6xy + a^2$.

Проверьте себя

10. Разложите на множители:

a) $(a + b)^2 + 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2$;
b) $(a + 2b)^2 - 2(a + 2b)(2a - b) + (2a - b)^2$;
c) $(1 + x)^2 + 2(1 + x)(3 - x) + (3 - x)^2$;
d) $(m - 0{,}1n)^2 + (m - n)^2 - 2(m - 0{,}1n)(m - n)$.

РАЗДЕЛ 6

3 Разность квадратов двух выражений

ИССЛЕДОВАНИЕ:

- В правом нижнем углу квадрата со стороной a начертите малый квадрат со стороной b (рисунок 3). Вырежьте ножницами меньший квадрат (рисунок 4).
- Полученную фигуру разрежьте ножницами пополам вдоль диагонали (рисунок 5) и полученные куски соедините между собой так, как показано на рисунке 6.
- Какими двучленами выражаются стороны полученного прямоугольника?
- Запишите формулу для вычисления площади этого прямоугольника.
- Расскажите, какое выражение у вас получилось?

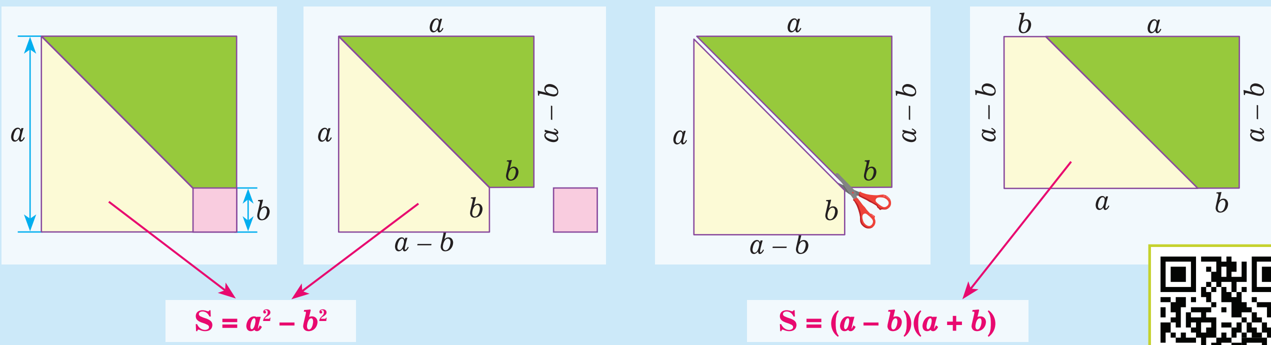


РИСУНОК 3 РИСУНОК 4 РИСУНОК 5 РИСУНОК 6

ФОРМУЛА РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению суммы и разности этих выражений. Если в этом равенстве поменять стороны местами, получится:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Произведение суммы и разности двух выражений равно разности квадратов этих выражений.

$a^2 - b^2 =$
$= a^2 - ab + ab - b^2 =$
$= a(a - b) + b(a - b) =$
$(a + b)(a - b)$

ПРИМЕР: 1) Разложите двучлен $25 - a^2$ на множители.

РЕШЕНИЕ: Так как $25 = 5^2$, то, записав двучлен в виде разности квадратов, разложим на множители: $25 - a^2 = 5^2 - a^2 = (5 + a)(5 - a)$.

2) Преобразовать произведение в многочлен: $(2a + 3b)(2a - 3b)$.

РЕШЕНИЕ: Так как выражение является произведением суммы и разности одних и тех же одночленов, то по формуле разности квадратов получим: $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Данные выражения запишите в виде квадрата одночлена:

$4a^2$	$9x^2y^2$	$16k^4$	$49m^6$	$0{,}01a^2b^4$	$1{,}21p^8$	$\frac{9}{64}x^4z^2$	$1\frac{11}{25}m^{10}$
		$(4k^2)^2$					

2. В данной на рисунке 7 фигуре произведите такие перемещения, чтобы полученная фигура стала моделью двучлена $a^2 - b^2$.

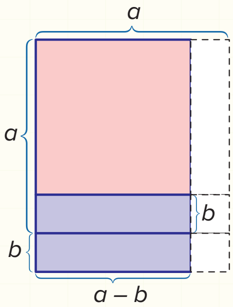


РИСУНОК 7

3. Запишите произведение в виде многочлена:

a) $(x^2 - 7)(x^2 + 7)$;
b) $(a^4 - b^3)(a^4 + b^3)$;
c) $(c^5 + k^7)(c^5 - k^7)$;
d) $(9x - b^2)(9x + b^2)$;
e) $(0{,}7a^3 + b)(0{,}7a^3 - b)$;
f) $(5c^8 + 3k)(5c^8 - 3k)$;

4. Вместо фигур запишите такие одночлены, чтобы получилось тождество.

a) $(3a +$ ▼$)($■ $- 6b) = 9a^2 -$ ▶;
b) (■ $- 3x)($■ $+ 3x) = 25m^2 -$ ▶;
c) $(1{,}1a +$ ■$)($▶ $-$ ▼$) =$ • $- 1{,}44n^4$;
d) $m^4 - 324n^8 = ($▼ $-$ ▶$)($▼ $+$ ▼$)$.

5. Запишите в виде многочлена:

a) $\left(\frac{5}{7}m^3 + \frac{1}{4}n^2\right)\left(\frac{5}{7}m^3 - \frac{1}{4}n^2\right)$;
b) $\left(1\frac{1}{9}a^5 + 1\frac{1}{2}n^7\right)\left(1\frac{1}{9}a^5 - 1\frac{1}{2}n^7\right)$;
c) $\left(\frac{4}{13} + \frac{1}{7}n^4\right)\left(\frac{4}{13} - \frac{1}{7}n^4\right)$;
d) $\left(\frac{10}{17} - 0{,}02n^7\right)\left(\frac{10}{17} + 0{,}02n^7\right)$.

6. Вычислите значения выражений, указав произведение данных множителей в виде суммы и разности двух одинаковых чисел:

a) $99 \cdot 101$; b) $37 \cdot 43$; c) $52 \cdot 48$; d) $201 \cdot 199$;
e) $1{,}05 \cdot 0{,}95$; f) $2{,}03 \cdot 1{,}97$; g) $17{,}3 \cdot 16{,}7$; h) $1002 \cdot 998$;
k) $29{,}8 \cdot 30{,}2$; m) $699 \cdot 701$; n) $103 \cdot 97$; l) $305 \cdot 295$.

ОБРАЗЕЦ:

$$50{,}2 \cdot 49{,}8$$
$$= (50 + 0{,}2) \cdot (50 - 0{,}2) =$$
$$= 50^2 - 0{,}2^2 =$$
$$= 2500 - 0{,}04 = 2499{,}96$$

7. Данные выражения упростите, используя формулы сокращённого умножения:

a) $(-y + x)(y + x)$;
b) $(x + y)(-x - y)$;
c) $(-a + b)(b - a)$;
d) $(x - y)(y - x)$;
e) $(-b - c)(b - c)$;
f) $(-a - b)(-a - b)$.

8. Запишите выражения в виде многочленов:

a) $(-5xy + a)(5xy + a)$;
b) $(-10p^4 + 9)(9 - 10p^4)$;
c) $(-3 - 2a^2b)(3 - 2a^2b)$;
d) $(0{,}2x + 10y)(10y - 0{,}2x)$;
e) $(17a^3 - 9x)(-17a^3 - 9x)$;
f) $(1{,}1y - 0{,}3)(0{,}3 + 1{,}1y)$.

9. a) При каком условии выражение $a^2 - b^2$ будет иметь наименьшее значение? Какому числу должен быть равен для этого одночлен a^2?

b) При каком условии выражение $a^2 - b^2$ будет иметь наибольшее значение? Какому числу должен быть равен для этого одночлен b^2?

10. Шабнам утверждает, что наименьшим значением выражения $(13a - 0,3)(0,3 + 13a)$ является число "$-0,09$". По-вашему, она права? Обоснуйте ответ. Определите наименьшее и наибольшее значения данных ниже выражений:

a) $(5a - 0,2)(0,2 + 5a)$; **b)** $(7a - 15)(15 + 7a)$;
c) $(1,2 - 7y)(7y + 1,2)$.

11. Разложите многочлены на множители:

a) $16a^2 - 4b^2$; **b)** $64 - 81k^2$; **c)** $m^2n^2 - 25$;
d) $x^2 - 1\frac{7}{9}$; **e)** $y^2 - 0,04$; **f)** $0,64 - 0,49x^2$;
g) $\frac{16}{25}n^2 - 625$; **h)** $1,69 - 3\frac{1}{16}x^2$.

12. Разложите многочлены на множители:

a) $36a^2 - b^2$; **b)** $16m^2 - 9n^2$; **c)** $k^2 - a^2b^2$;
d) $-x^2 + 25n^2$; **e)** $64x^2 - 121y^2$; **f)** $4a^2b^2 - 1$;
g) $81a^2 - 49$; **h)** $-49m^2 + 144b^2$; **k)** $p^2 - a^2b^2$;
m) $0,01n^2 - 9m^2$; **n)** $0,09x^2 - 0,49y^2$; **l)** $a^2x^2 - 1,21m^4$.

13. Применяя формулу разности квадратов, проведите вычисления в устной форме. Проверьте ответы.

a) $63^2 - 53^2$; **b)** $126^2 - 125^2$; **c)** $0,899^2 - 0,111^2$;
d) $47^2 - 67^2$; **e)** $41,7^2 - 41,6^2$; **f)** $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

14. Найдите значения дробей:

a) $\frac{36}{13^2 - 11^2}$; **b)** $\frac{26^2 - 12^2}{54^2 - 16^2}$; **c)** $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$; **d)** $\frac{67^2 - 17^2}{83^2 - 77^2}$.

15. Упростите выражения:

a) $(0,8x + 15)(0,8x - 15) + 0,36x^2$; **b)** $(3a - 1)(3a + 1) - 17a^2$;
c) $5b^2 + (3 - 2b)(3 + 2b)$; **d)** $100x^2 - (5x - 4)(4 + 5x)$;
e) $2x^2 - (x - 1)(x + 1)$; **f)** $6x^2 - (x - 0,5)(x + 0,5)$.

16. Выполните умножение:

a) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; **b)** $(2x + y)(4x^2 + y^2)(2x - y)$;
c) $(m^3 + b)(m^3 - b)(m^6 + b^2)$; **d)** $(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$.

ОБРАЗЕЦ:

$$a^2-1\frac{9}{16}=0$$
$$a^2-\frac{25}{16}=0$$
$$\left(a-\frac{5}{4}\right)\left(a+\frac{5}{4}\right)=0$$
$$a-\frac{5}{4}=0;\ a+\frac{5}{4}=0$$
$$a=\frac{5}{4};\ a=-\frac{5}{4}$$

Ответ: $\frac{5}{4};\ -\frac{5}{4}$.

17. Решите уравнения по образцу:

a) $(a-8)(a+12)=0$;
b) $x^2-16=0$;
c) $m^2-0{,}25=0$;
d) $\frac{1}{9}-y^2=0$;
e) $9x^2-64=0$;
f) $x^2-\frac{9}{25}=0$;
g) $b^2+36=0$;
h) $81a^2+1=0$;
k) $4x^2-9=0$;
m) $\frac{49}{81}m^2-1=0$.

18. Упростите выражения:

a) $5a(a-8)-3(a+2)(a-2)$;
b) $(1-2b)(1+2b)+4b(b-2)$;
c) $(3x-y)(3x+y)-(x-y)(x+y)$;
d) $(11a+3b)(11a-3b)-(11a-3b)(3b-11a)$.

19. Используя формулу разности квадратов, разложите выражения на множители:

ОБРАЗЕЦ:

$(a+b)^2-2^2=(a+b-2)(a+b+2)$

a) $(x+3)^2-4^2$;
b) $(4a-1)^2-25$;
c) $81-(2x-5)^2$;
d) $9y^2-(1+7y)^2$;
e) $49x^2-(2+3x)^2$;
f) $(a+11)^2-121$;
g) $(a+b)^2-(b-a)^2$;
h) $(m+n)^2-(m-n)^2$;
k) $(2x-5)^2-(5+2x)^2$;
m) $(4c-x)^2-(2c+3x)^2$.

ОБРАЗЕЦ:

$$(a-2b)^2-(2b+a)^2=$$
$$=((a-2b)-(2b+a))\cdot$$
$$\cdot((a-2b)+(2b+a))=$$
$$=(a-2b-2b-a)\cdot$$
$$\cdot(a-2b+2b+a)=$$
$$=-4b\cdot 2a=-8ab.$$

20. Запишите произведение в виде многочлена:

a) $(x-y-7)(x-y+7)$;
b) $(m-3n-2)(m+3n+2)$;
c) $(a-4b+6)(a+6+4b)$;
d) $(3x-1+b)(3x+1-b)$.

21. Разложите числа на простые множители:

a) 119;
b) 319;
c) 817;
d) 851;
e) 1431;
f) 2419.

УКАЗАНИЕ:

Запишите число в виде разности квадратов двух чисел:
$2419=2500-81$

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 6

4 Куб двучлена

ИССЛЕДОВАНИЕ:

- Представим себе куб с ребром равным $a + b$. Как вычислить объем куба? Запишите ответ.
- Разобьём куб на части: кубы ребром a и b и параллелепипеды, как на рисунке 8. Укажите какая часть является той или иной фигурой.
- Найдя объем каждой фигуры, запишите сумму найденных величин. Какое выражение получилось?
- Приравняйте объем всего куба сумме объёмов его частей.
- Запишите полученное алгебраическое выражение.

Как найти объём куба?

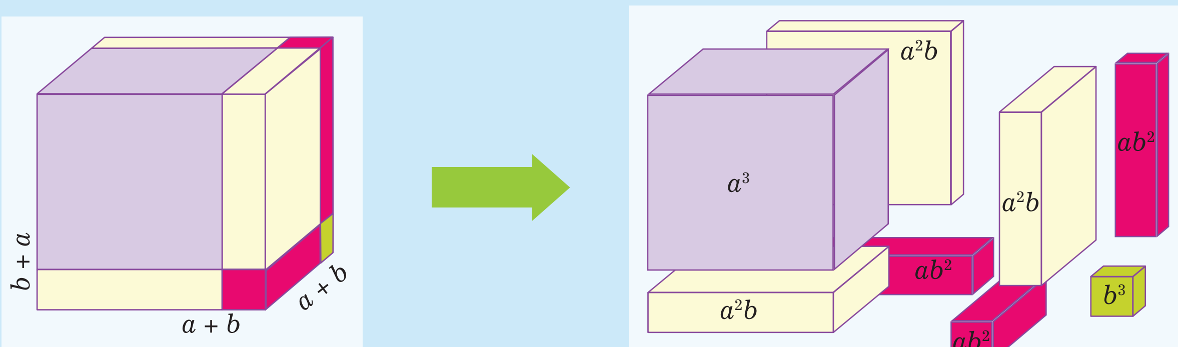


РИСУНОК 8

Приравняем объёмы этих фигур:

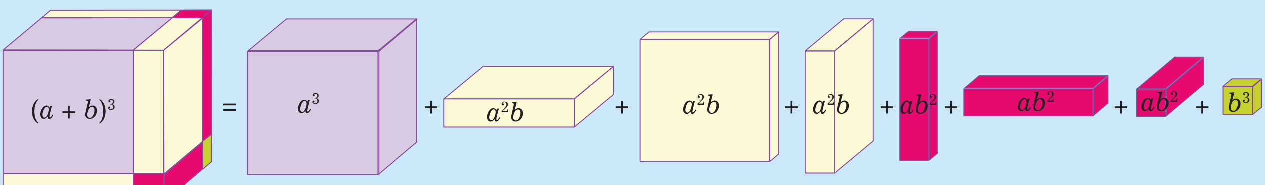


РИСУНОК 9

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Обоснуйте сами:

$(a - b)^3 = ?$

ФОРМУЛА КУБА СУММЫ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ:

$$\boldsymbol{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Куб суммы двух выражений равен: кубу первого выражения, плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, плюс куб второго выражения:

Запомни:
С помощью этих формул куб двучлена представляется в виде многочлена.

ФОРМУЛА КУБА РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Куб разности двух выражений равен: кубу первого выражения, минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе, плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго, минус куб второго выражения:

ПРИМЕР: Запишите кубы двучленов в виде многочленов:

a) $(x+3y)^3$; b) $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)^3$

РЕШЕНИЕ: a) $(x+3y)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 3y + 3\cdot x\cdot(3y)^2 + (3y)^3 =$
$= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$.

b) $$\left(2a-\frac{1}{2}b\right)^3 = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot\frac{1}{2}b + 3\cdot 2a\cdot\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^3 =$$

$$= 8a^3 - 6a^2b + 1{,}5ab^2 - \frac{1}{8}b^3.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Преобразуйте выражение в многочлен, трижды умножив само на себя:

a) $(a+1)^3$; b) $(a-2)^3$; c) $(2x+y)^3$; d) $(2a-3)^3$.

2. Запишите выражения в виде многочлена, применяя формулы:

a) $(x+y)^3$; b) $(m-n)^3$; c) $(x+2)^3$; d) $\left(\frac{2}{3}a+3b\right)^3$;

e) $(m+0{,}2)^3$; f) $(5-x)^3$; g) $(2p-1)^3$; h) $\left(y+\frac{1}{3}\right)^3$.

3. Представьте основание степени в виде суммы и примените для вычисления формулу куба суммы.

a) 35^3; b) $12{,}1^3$; c) 52^3; d) 43^3; e) $20{,}01^3$.

УКАЗАНИЕ:
$20{,}01^3 = (20+0{,}01)^3$

4. Вместо X и Y запишите такие одночлены, чтобы получилось тождество.

a) $(a^3 + X)^3 = a^9 + 3a^7b + 3a^5b^2 + Y$;
b) $(3a^2 - X)^3 = 27a^6 - 54a^5 + 36a^4 - 8a^3$;
c) $(X + 2a^3)^3 = 8a^9 + 24a^6b + 24a^3b^2 + 8b^3$;
d) $(a^2 - X)^3 = a^6 - 9a^5 + 27a^4 - Y$;
e) $(a^3 + X)^3 = a^9 + 3a^7b^4 + 3a^5b^8 + Y$.

5. Запишите выражения в виде многочлена:

a) $(x^2 - y^4)^3$; b) $-(a^5 + b^7)^3$; c) $(3x^2 - 7y^2)^3$;

d) $-(4m^4 + n^5)^3$; e) $\left(\frac{2}{3}a + b^8\right)^3$; f) $\left(1\frac{1}{2}a^6 - 2\frac{1}{2}b^2\right)^3$;

g) $\left(ab^3 - \frac{3}{4}\right)^3$; h) $-\left(\frac{1}{5}m + \frac{3}{2}n\right)^3$; m) $(0{,}5xy^2 - 0{,}2x^2y)^3$.

6. Упростите выражения:

a) $(a + b)^3 - (a - b)^3$; b) $(3m - n)^3 - (n + 3m)^3$;

c) $(x + y)^3 - 3xy(x + y)$; d) $3ab(a + b) - (a + b)^3$;

e) $(a - b)^3 + 3ab(a - b)$; f) $(m - n)^3 - (m - n)(m^2 + mn + n^2)$.

7. Упростите выражения:

a) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{5}{7}x - 1\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}x + 1\frac{1}{4}\right)^3$;

c) $5 \cdot (2x + y)^3 - 2 \cdot (3y - x)^3$; d) $6 \cdot \left(\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^3$

8. Преобразуйте выражения в многочлен:

a) $(3ab^2 + a^3b^2)^3$; b) $(m^4n^5 - 3mn)^3$;

c) $\left(\frac{2}{5}x^4y^3 + \frac{1}{2}xy^7\right)^3$; d) $(7abc^3 - 3a^2bc)^3$;

e) $(0{,}1x^6y^2c^{10} - 0{,}2)^3$; f) $(ab^5c^4 + 1{,}2abc)^3$.

9. Приближённый расчёт: Найдите приближённое значение следующих числовых выражений, применив приближённое равенство: $(1 \pm a)^3 \approx 1 \pm 3a$ $(0 < a < 1)$

a) $(1 + 0{,}01)^3$; b) $1{,}04^3$; c) $0{,}99^3$;

d) $1{,}1^3$; e) $0{,}996^3$.

10. a) Каким натуральным числам могут равняться a и b, если $a + b = 9$, $ab = 8$? Натурально ли значение выражения $a^3 - b^3$?

b) Каким натуральным числам могут равняться a и b, если $a - b = 9$, $ab = 10$? Найдите $a^3 + b^3$.

c) $a - b = 52$, $ab = 1260$, a и b — натуральные числа. Применяя тождество $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$, вычислите значение выражения $2(a^3 - b^3)$.

УКАЗАНИЕ:

$1{,}09^3 = (1 + 0{,}09)^3 \approx$

$\approx 1 + 3 \cdot 0{,}09 =$

$= 1{,}27$

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 6

5 Сумма и разность кубов двух выражений

В известных вам формулах $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ и $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ трёхчлены $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ являются полными квадратами соответственно двучленов $(a + b)$ и $(a - b)$.

Трёхчлены $a^2 + ab + b^2$ и $a^2 - ab + b^2$ называются **неполными квадратами** соответственно двучленов $a + b$ и $a - b$

ИССЛЕДОВАНИЕ 1: В правой части равенства $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ проделаем следующие преобразования:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b).$$

отсюда определим $a^3 + b^3$:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) =$$
$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

В итоге получили, $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ 2: В правой части равенства $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ проделаем следующие преобразования:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b).$$

Отсюда определим $a^3 - b^3$:

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = (a - b)((a - b)^2 + 3ab) =$$
$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

В итоге получим: $\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$.
По результатом исследований запишем следующие формулы:

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ СУММЫ КУБОВ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ РАЗНОСТИ КУБОВ ДВУХ ВЫРАЖЕНИЙ:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.

Запомни:
Это формулы разложения суммы и разности кубов на множители.

ПРИМЕР 1: Разложите на множители $27a^3 + 8b^3$.

РЕШЕНИЕ: $27a^3 + 8b^3 = (3a)^3 + (2b)^3 = (3a + 2b)((3a)^2 - 3a \cdot 2b + (2b)^2) =$
$= (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$.

ПРИМЕР 2: Преобразуйте в многочлен произведение:
$(x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$.

РЕШЕНИЕ: Как видим, первый множитель это разность $(x - 5y)$, второй множитель – это неполный квадрат суммы $(x + 5y)$. Тогда по формуле разности кубов

$$(x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2) = (x)^3 - (5y)^3 = x^3 - 125y^3.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите полные и неполные квадраты данных двучленов. Объясните их разницу.

a) $a + 2b$; b) $6m - n$; c) $2k - 3$; d) $0{,}5x + 5y^2$;
e) $7m - n^2$; f) $\frac{2}{5}a + b^4$; g) $1{,}6 - 5d$; h) $1{,}3ab + 1$.

2. Разложите на множители сумму и разность кубов.

a) $m^3 + n^3$; b) $x^3 - y^3$; c) $8 + a^3$; d) $125 + a^3$;
f) $27 - x^3$; g) $c^3 - 1$; h) $t^3 + 1$; k) $x^3 - 64$.

3. Представьте в виде куба одночлены и разложите выражение на множители:

a) $k^3 - 1000$; b) $0{,}001 + a^3$; c) $\frac{1}{27}a^3 + b^6$; d) $\frac{27}{64} - \frac{1}{8}b^3$;
f) $-125a^6 + 1$; g) $343a^{12} - b^9$; h) $a^3b^6 + d^6$; k) $1\frac{91}{125} - 0{,}001x^6$.

4. Преобразуйте выражения в многочлен:

a) $(2p + 3)(4p^2 - 6p + 9)$; b) $(b - 1)(b^2 + b + 1)$;
c) $(3n + m^2)(9n^2 - 3m^2n + m^4)$; d) $(4m - 3n^2)(16m^2 + 12mn^2 + 9n^4)$;
f) $(3a + d^8)(9a^2 - 3ad^8 + d^{16})$; g) $(3 - d)(9 + 3d + d^2)$.

5. Найдите значения выражений

a) $a^3 - b^3$ при $a - b = 4$; $ab = -1{,}75$;

b) $a^3 + b^3$ при $a + b = -5$; $ab = -6$.

6. Преобразуйте произведение в многочлен рациональным способом:

a) $(-a - b)(a^2 - ab + b^2)$;
b) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$;
c) $(-a - b)(-a^2 + ab - b^2)$;
d) $(-a - b)((a + b)^2 - 3ab)$.

7. Преобразуйте выражение в многочлен по формуле суммы кубов.

a) $(x^3 + y^5)(x^6 - x^3y^5 + y^{10})$;
b) $(3d^2 + 2c)(9d^4 - 6cd^2 + 4c^2)$;
c) $(25 - 5y^6 + y^{12})(5 + y^6)$;
d) $(9r^8 - 12r^4s^5 + 16s^{10})(3r^4 + 4s^5)$.

8. Вместо больших букв. запишите такие одночлены, чтобы равенство превратилось в тождество.

a) $(2x + \mathrm{A})(4x^2 - 2x\mathrm{A} + \mathrm{A}^2) = 8x^3 + 27y^3$;

b) $(\mathrm{A} - 4x)(25y^2 + \mathrm{B}) = \mathrm{C}^3 - \mathrm{D}^3$;

c) $(-\mathrm{A} - 3x)(\mathrm{A}^2 - 3x\mathrm{A} + 9x^2) = -27c^3 - 8d^9$.

d) $(5x - \mathrm{A})(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{D}^3 - 8y^{12}$.

9. Решите уравнения.

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$;

b) $6(y + 1)^2 + 2(y + 1)(y^2 - y + 1) - 2(y + 1)^3 = -22$;

c) $(a + 2)^3 - a(3a + 1)^2 + (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) = 53$;

d) $5x(x + 3)^2 - 5(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 30(x + 2)(x - 2) = 75$.

10. Запишите выражения в виде произведения.

a) $(x + 1)^3 + x^3$;
b) $(a - b)^3 + b^3$;
c) $1000 + (a - b)^3$;
d) $8x^3 + (x - y)^3$;
f) $(y - 2)^3 + 27$;
g) $27m^3 + (m + n)^3$.

11. Севиль утверждает, что выражение $753 + 443$ кратно 7. Как это проверить? Таким же способом покажите, что

a) $97^3 + 93^3$ кратно 19;
b) $215^3 + 94^3$ кратно 3.

12. Докажите, что при любом целом значении q данные выражения кратны a:

a) $(11 - q)^3 + q^3$, $a = 11$;
b) $(4 - 2q)^3 + 8q^3$, $a = 4$;
c) $8q^3 + (17 - 2q)^3$, $a = 17$;
d) $3q^3 + 3(4 - q)^3$, $a = 12$.

13. При делении некоторого натурального числа на 4 в остатке получается 1, при делении второго натурального числа на 4 в остатке получается 3. Чему равен остаток при делении на 4 суммы кубов этих чисел.

РАЗДЕЛ 6

6 Применение формул сокращённого умножения

1. Вычислите:

a) $108 \cdot 92$; b) $0{,}94 \cdot 1{,}06$; c) $1{,}09 \cdot 0{,}91$; d) $1005 \cdot 995$.

2. Запишите в виде произведения:

a) $2y(y^2 - 4)(y^2 + 4)$; b) $(1 - b^3)(1 + b^3)(1 + b^6)$;
c) $-x(3x - x^2)(x^2 + 3x)$; d) $(a^4 - 5)(a^4 + 5)(a^8 + 25)$.

3. Упростите выражения:

a) $(a - 1)(a + 1) - a(a - 1)$; b) $(y + 7)(y - 7) + (y - 5)(5 + y)$;
c) $(x - 3)(x + 3) + x(6 - x)$; d) $(4 + m)(m - 4) - (m - 8)(m + 8)$.

4. Покажите, что выражения не зависят от значений переменных:

a) $(a - 10)(a + 10) - (a + 12)(a - 12)$; b) $\left(y - \frac{3}{8}\right)\left(y + \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{3}{4} - y\right)\left(y + \frac{3}{4}\right)$.

5. Преобразуйте в многочлен:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$; b) $(a - b + 3)(a - b - 3)$;
c) $(m + n - 2)(m + n + 2)$; d) $(c - 3d + 4)(c + 3d + 4)$.

6. Решите уравнения:

a) $(x - 7)^2 + 3 = (x - 2)(x + 2)$; b) $(5x - 1)^2 - 1(1 - 3x)^2 = 16x(x - 3)$.

7. Разложите на множители:

a) $9 - a^2b^2$; b) $4m^2n^4 - 9$; c) $0{,}09y^6 - 0{,}49x^2$;
d) $1{,}21p^4 - 1$; f) $0{,}01a^2b^6 - 0{,}16$; g) $1\frac{7}{9}x^4 - \frac{9}{16}y^2$.

8. Найдите значение выражения:

a) $\frac{38^2 - 17^2}{72^2 - 16^2}$; b) $\frac{518^2 - 482^2}{360}$; c) $\frac{39{,}5^2 - 3{,}5^2}{57{,}5^2 - 14{,}5^2}$; d) $\frac{52^2 - 48^2}{92^2 + 88^2 - 2 \cdot 92 \cdot 88}$.

9. Разложите на множители:

a) $(x - 3)^2 - 9$; b) $(2x - 1)^2 - (5x + 2)^2$; c) $81 - (a + 4)^2$; d) $9(b + 1)^2 - 4$.

10. Упростите выражения и найдите значение выражения:

a) $(3a - 2b)^2 - (2a - b)^2$ при $a = 1{,}35$ və $b = -0{,}65$;
b) $(2y - x)^2 + (y + 2x)^2$ при $x = 1{,}2$ və $y = -1{,}4$.

11. Покажите истинность следующих утверждений при натуральных значениях переменных:

a) выражение $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$ кратно 4;
b) выражение $(5x + 1)^2 - (2x - 1)^2$ кратно 7.

12. Преобразуйте в многочлен:

a) $(a^2 - 7)(a + 2) - (2a - 1)(a - 14)$; b) $(2 - x)(1 + 2x) + (1 + x)(x^3 - 3x)$.

13. Разложите на множители:

a) $0{,}027a^3 + 1$; b) $m^3 - 0{,}008n^3$; c) $x^6 - 0{,}064y^9$;

d) $\frac{1}{64} - b^{12}$; e) $-a^{15} + \frac{8}{27}$; f) $3\frac{3}{8}x^{12} + b^{15}$.

14. Выясните истинность следующих утверждений:

a) $41^3 + 17^3$ кратно 58; b) $53^3 - 125$ кратно 24;

c) $66^3 + 34^3$ кратно 400.

15. Преобразуйте произведение $(x^2 - 10x + 6)(2x + b)$ в многочлен стандартного вида. При каком значении b:

a) в многочлене не будет участвовать множитель x^2?

b) коэффициенты x^2 и x будут равны?

16. Разложите на множители:

a) $(a + 7)^3 - 64$; b) $(9b + 5)^3 - 27$; c) $c^6(c - 6)^3 - 125c^9$;

d) $x^6y^9 - 64x^3$; e) $(2x + y)^3 - (2x - y)^3$; f) $(4x + 5y)^3 - (4x - 5y)^3$.

17. Определите ошибки в равенствах:

a) $(a + 2b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; b) $(m + 4n^3)^3 = m^3 + 2mn^3 + 3mn^6 - 64n^9$;

c) $(2x - 3y)^2 = 2x^2 + 12xy + 3y^2$; d) $27a^6 + 8b^9 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$.

18. Ширина прямоугольника на 10 см короче стороны квадрата, длина на 10 см длиннее стороны квадрата. Сравните площади прямоугольника и квадрата.

19. Докажите тождество:

$(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = 2b^6$.

20. Преобразуйте многочлен в произведение:

a) $2x^8 - 12x^4 + 18$; b) $2x^6 + 8y^2 + 8x^3y$;

c) $4x + 4xy^6 - xy^{12}$; d) $-x^4y - 6x^2y^3 - 9y^5$.

21. Разложите многочлены на множители:

a) $3a^3 - 3ab^2 + a^2b - b^3$; b) $x^4 - 24 + 8x - 3x^3$.

22. Решите уравнения.

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; b) $y^3 - 6y^2 + y - 6 = 0$;

c) $4x^3 - 3x^2 = 4x - 3$; d) $2a^3 - 18a = a^2 - 9$.

Обобщающие задания

1. Разложите многочлены на множители. Объясните, каким способом вы это сделали.

a) $5a^2b - 5b^2$; b) $7ab^2 - 7ac^2$; c) $2a^4c - 32b^4c$;
d) $4c^3d - 9cd^3$; e) $-64m^2n + 25n$; f) $9mn^6 - 117m$;
g) $6x^2y^2 - 24x^2z^2$; h) $x^2y - 16y$; k) $7p^6q - 7q^7$.

2. Разложите многочлен на множители. Объясните, в каком примере вы применили способ вынесения общего множителя за скобку; в каком применили формулы сокращенного умножения, и в каком оба этих способа. Почему?

a) $3x^2y + 6xy^2 + 3y^3$; b) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$;
c) $a^2 - b^2 - a + b$; d) $5a^2 - 10ab + 5b^2$;
e) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$; f) $c + d + c^2 - d^2$;
g) $7xy^2 + 28xy + 28x$; h) $9 - m^2 + 4mn - 4n^2$.

3. Решите уравнения с помощью правила равенства нулю произведения.

a) $x(x - 4) = 0$; b) $6m^4 - 54m^2 = 0$; c) $a^4 - a^3 - a^2 + a = 0$;
d) $100b^2 - 4b^4 = 0$; e) $a^3 - 2a^2 + a = 0$; f) $n^3 - 12 + 3n^2 - 4n = 0$.

4. Преобразуйте произведение в многочлен:

a) $(1 + 4b)(1 - 4b + 16b^2)$; b) $(-7p + 5k)(25k^2 + 35pk + 49p^2)$.

5. Найдите натуральное число n в равенстве: $111111 - 222 = n^2$

6. a) От квадрата со стороной x см отрезали прямоугольник шириной 2 см (рисунок 10, a). Площадь оставшегося прямоугольника на 14 см^2 меньше площади квадрата. Найдите периметр квадрата.

b) К квадрату со стороной x см приставили прямоугольник шириной 3 см (рисунок 10, b). Площадь получившегося прямоугольника на 39 см^2 больше площади квадрата. Найдите периметр квадрата.

7. a) Докажите равенство Диофанта:
$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2-d^2)$.

b) Применяя равенство Диофанта, разложите на множители:

1) $(3c + 7d)^2 + (3d - 7c)^2$; 2) $\left(3a+\frac{2}{5}b\right)^2+\left(3b-\frac{2}{5}a\right)^2$.

Проверьте себя

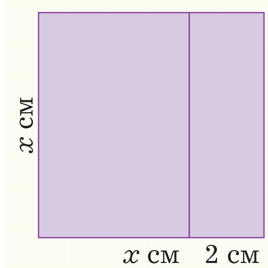


РИСУНОК 10, a

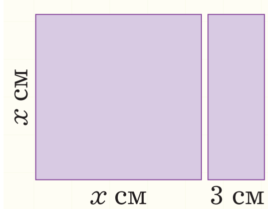


РИСУНОК 10, b

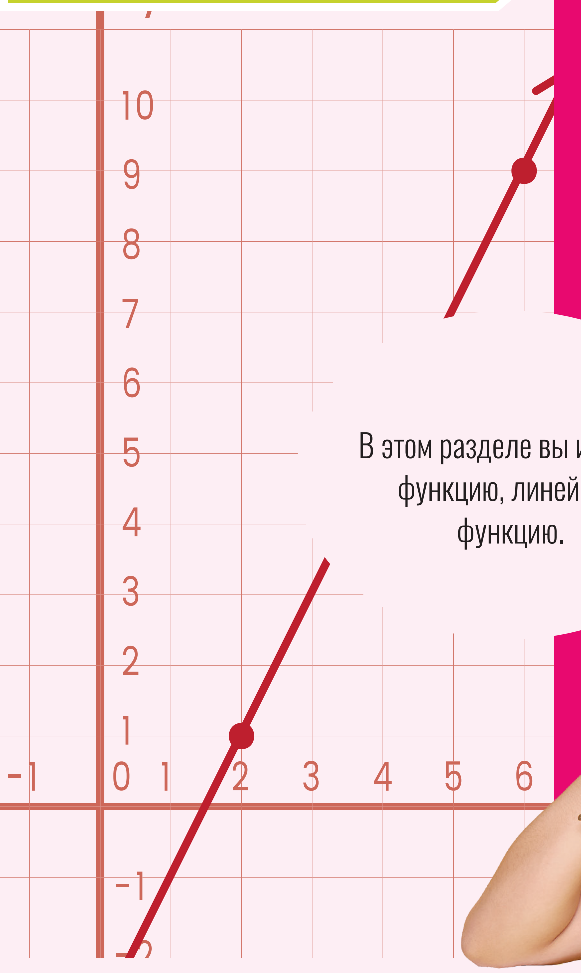
ФУНКЦИЯ

РАЗДЕЛ 7

«**Функция**» – одно из основных понятий в математике. Если между двумя переменными величинами существует некоторая зависимость, то она образует функцию. В случае, когда значение какой-нибудь одной из двух переменных является причиной получения по какому-либо правилу соответствующего значения другой переменкой, тогда вторая переменная оказывается зависимой от первой. Первая переменная называется **свободной (независимой)**, вторая-зависимой, взаимосвязь между ними – **функциональной зависимостью (функцией)**.

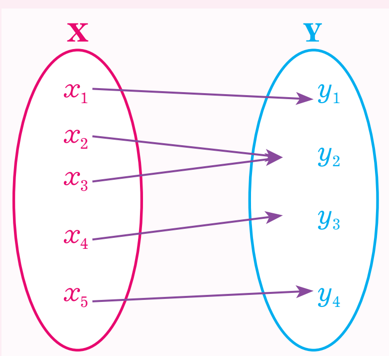
Например, автомобиль, движущийся со скоростью 70 км/ч за 1 час проезжает 70 км, за 2 часа 140 км, за 5 часов 350 км и так далее. То есть каждому промежутку времени соответствует определённое расстояние. В этом примере закономерность (связь) между временем и расстоянием задаётся по правилу $s = v \cdot t$.

Функция – это соответствие (правило) по которому каждому элементу x из множества X сопоставляется единственный элемент y из множества У.



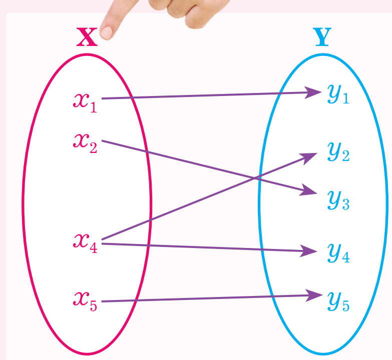
В этом разделе вы изучите функцию, линейную функцию.

Внимание: Чтобы закономерность называлась функцией, необходимо, чтобы каждому значению переменной x соответствовало только одно значение переменной y. В противном случае эта закономерность не считается функцией.



Функция

не функция



Почему ?

1 Задание функции

Существует несколько способов задания функции: задание формулой, таблицей или парами чисел, графиком (диаграммой) и др.

Запомни: Не всегда удается перейти из одного способа задания функции к другому.

I. ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ ФОРМУЛОЙ:

ПРИМЕР: a) $y = 2x + 3$; b) $y = -5x$; c) $y = x^2$; d) $y = \frac{7}{x}$ и т.д.

В общем виде функция записывается как $y = f(x)$ (или же $y = g(x)$, $y = h(x)$) и т.д.). $y = f(x)$ **читается** *«игрек равен эф от икс».* Это способ задания **функции формулой**.

Если функция задана формулой, то, придавая значения независимой переменной, вычисляют значения зависимой переменной. Эти значения записывают в таблицу или в виде пар чисел. В соответствии с парами чисел строится график функции.

II. ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ ТАБЛИЦЕЙ ИЛИ ПАРАМИ ЧИСЕЛ:

Независимая переменная x	4	5	7	9	11
Зависимая переменная y	5	8	3	2	6

Пара чисел: $(x; y) \to \{(4; 5),\ (5; 8),\ (7; 3),\ (9; 2),\ (11; 6)\}$

III. ЗАДАНИЕ ГРАФИКОМ:

Функцию можно задать графически с помощью некоторой кривой. Например, на рисунке 1 функция $y = f(x)$ задана графически.

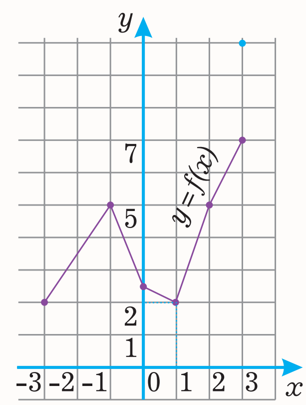


РИСУНОК 1

В равенстве $y=f(x)$ независимая переменная x называется **аргументом**, зависимая переменная y называется **значением функции**.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Выясните, является ли зависимость между переменными, заданная в виде таблицы или пар чисел, функцией? Если эта зависимость является функцией, то выпишите значения аргумента и функции. В противном случае объясните ваш ответ.

a) $\{(6; 3), (5; 4), (4; 5), (3; 6)\}$;

b) $\{(-1; 1), (-2; 4), (-3; 9), (-4; 16), (5; 25), (6; 36)\}$;

c)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	3	3	3	3	3	3

2. Найдите значения функции.

a) $f(x) = \frac{x}{5}$ при $x = -5;\ x = 0;\ x = 10;$ b) $f(x) = 3x + 1$ при $x = \frac{1}{3};\ x = \frac{1}{2};\ x = \frac{3}{4}$.

3. Физика: На тело, погруженное в воду, действует давление, вычисляемое по формуле $f(x) = 100000 + 9800x\ (\frac{\text{Н}}{\text{м}^2})$ (x – глубина воды). Вычислите давление на пловца на глубине $x = 3$ м, 5 м, 7 м.

4. Определите закономерность между значениями аргумента и функции и запишите формулу функции, заданной таблицей и парами чисел.

УКАЗАНИЕ: $y = ax+b$

a)

t, время, часы	1	2	3	4	5	6
s, расстояние, км	50	100	150	200	250	300

b)

x	8	-6	-4	-3	-2	0
y	-31	25	17	13	-7	1

c) $\{(-1; -2), (-2; -4), (-3; -6), (-4; -8), (5; 10), (6; 12)\}$;

d) $\{(1; 0{,}5), (2; 1), (3; 1{,}5), (4; 2), (5; 2{,}5), (6; 3)\}$.

Постройте графики этих функций.

5. Здоровье: Функция $f(x) = 9x$ определяет зависимость между числом каллорий и количеством жира в какой-либо пище. Здесь x – количество жира в граммах. Определите калорийность следующих продуктов питания:

a) хлеб, $x = 0{,}5$ г; b) макароны с сыром, $x = 2$ г; c) пицца, $x = 17$ г.

6. Бизнес: В магазине бытовых товаров работникам заработная плата за неделю и надбавки к ней расчитываются с помощью следующих функций (x – полученная от продаж сумма денег в манатах):

$f(x) = 200 + 0{,}5x,$ если $x < 2000$ AZN,

$f(x) = 1000 + 0{,}1x,$ если $x \geq 2000$ AZN.

Определите выплаченную работникам сумму денег за последнюю неделю, если выручка от продаж составляла:

a) 2600 AZN; b) 1890 AZN; c) 2000 AZN; d) 3420 AZN.

7. Если заданные пары чисел образуют функцию, то выпишите значения аргумента и функции. В противном случае объясните почему это не функция.

a) $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\}$; b) $\{(a, b), (c, b), (d, b), (k, b)\}$.

8. Найдите значения x, если значения функции $f(x) = 7 + 0{,}5x$ равны $18;\ 0;\ -3{,}5$.

9. Физика: Нижеприведённая таблица показывает зависимость p атмосферного давления от высоты над уровнем моря h.

h, км	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
p, мм ртутного столба	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,8	198,1	40,9

a) Определите атмосферное давление на высоте 1 км, 3 км, 5 км, 10 км.

b) На какой высоте атмосферное давление будет равно $760{,}0$ мм рт. ст., $674{,}0$ мм рт. ст., $40{,}9$ мм рт. ст.?

10. На рисунке 2 дан график изменения продолжительности дня в зависимости от времени года. На оси ординат отмечена продолжительность дня на первое число каждого месяца, а на оси абсцисс – порядковый номер каждого месяц

a) 1-го числа какого месяца продолжительность дня была 10 часов, 700 мин., 850 мин.?

b) В какое время года продолжительность дня была больше 700 мин., меньше 10 часов?

c) Сколько часов составляла продолжительность дня 1 января, марта, мая, июля, октября?

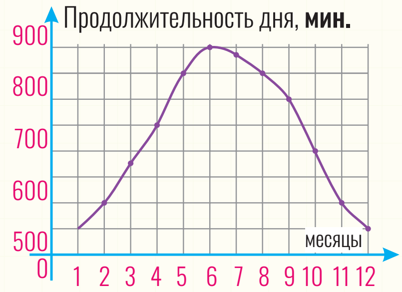


РИСУНОК 2

11. Дан график функции $y(x)$ (рис. 3). Определите по графику:

a) Значения $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(-1)$.

b) При каком значении x функция получит значения 1, 2, 0?

c) Назовите несколько значений x, при которых значения y имели положительный знак.

d) Назовите несколько значений x, при которых значения y имели отрицательный знак.

e) Назовите несколько значений x, при которых значения y были бы равны нулю.

m) Какие из точек (2; 0); (4; 1); (0; 1); (0; –1); (–1; 0) относятся к данному графику? Почему?

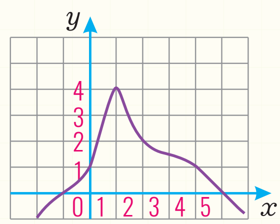


РИСУНОК 3

12. Функция задана формулой: $f(x) = \frac{3}{4}(2x + 1)$.

a) Что означают записи $f(3)$, $f(-12)$, $f(2, 1)$? Какие значения следует записать вместо x в данной формуле $f(x)$, чтобы вычислить их?

b) На основе равенств $f(x) = 0$; $f(x) = 2{,}4$; $f(x) = -0{,}9$ найдите x

13. Функция задана формулой $p(x) = 2 - 5x2$. Среди приведённых ниже равенств найдите верные.

a) $p(-2) = 18$;

b) $p(4) = 78$;

c) $p\left(-\frac{1}{5}\right) = 1\frac{4}{5}$;

d) $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4}$

РАЗДЕЛ 7

2 Линейная функция

Линейная функция – это функция, заданная формулой – $\boldsymbol{y = ax + b}$ (a и b некоторые числа). a угловой коэффициент, b свободный коэффициент.

График линейной функции – **прямая линия.**

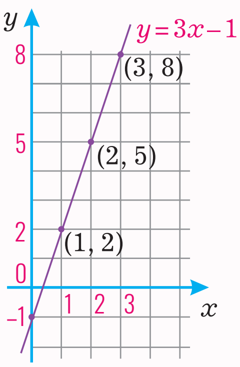


РИСУНОК 4

ПРИМЕР: Построить график функции $y = 3x - 1$.

РЕШЕНИЕ: Выпишем несколько пар чисел, удовлетворяющих данной формуле, и составим таблицу значений:

x	0	1	2	3
y	-1	2	5	8

Пары чисел:
$\{(0, -1), (1, 2), (2, 5), (3, 8)\}$

Отметим в прямоугольной системе координат точки, соответствующие этим парам чисел, и соединим их линией. Полученный график является **прямой линией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Согласно аксиоме прямой через две разные точки проходит единственная прямая, то для построения графика линейной функции достаточно определять значения функции только для двух значений аргумента.

Аксиома: Через две точки проходит одна и только одна прямая.

Прямая линия, являющаяся графиком функции $y = ax + b$ *в прямоугольной системе координат, обязательно пересечёт одну из осей координат.*

Чтобы определить точки пересечения прямой линии с осями OX и OY необходимо:

1) *для определения точки пересечения графика с осью OX подставить в формулу* $y = 0$ *и вычислить* x*:* $(x, 0)$;

2) *для определения точки пересечения графика с осью OY подставить в формулу* $x = 0$*и вычислить* y*:* $(0, y)$.

Действительно,

при $x = 0$, $y = ax + b = a \cdot 0 + b = b$. → Значит: $(0, b)$.

при $y = 0$, из $y = ax + b$ получится $0 = ax + b$

$ax = -b$ и $x = -\dfrac{b}{a}$, → Значит, $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$.

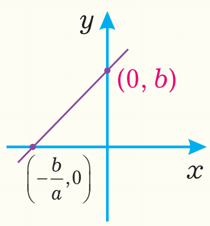


РИСУНОК 5

Таким образом, график функции $y = ax + b$ пересекает ось OX (абсцисс) в точке $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ ось, OY (ординат) в точке $(0, b)$ (рисунок 5).

ПРИМЕР: Определите точки пересечения графика функции $y = 2x - 3$ с осями координат.

РЕШЕНИЕ: Ордината всех точек, лежащих на оси абсцисса (OX) равна нулю. Поэтому при $y = 0$ $\ 2x - 3 = 0$ и $x = 1{,}5$. Таким образом, график функции $y = 2x - 3$ пересекает ось абсцисс в точке $(1{,}5;\ 0)$.

Абсцисса точек, лежащих на оси ординат (OY) равна нулю. Поэтому при $x = 0$ в формуле $y = 2x - 3$ получим $y = -3$. То есть, график функции $y = 2x - 3$ пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

Ответ: $(1{,}5;\ 0)$ и $(0; -3)$.

Если в формуле $y = ax + b$ принять $a = 0$ то получится постоянная функция, $y = b$ график которой есть прямая, проходящая через точку $(0; b)$ параллельно оси OX (рисунок 6).

функция $y=b$ $(b>0)$ — функция $y=b$ $(b<0)$ — функция $y=0$ $(b=0)$ — **ОБРАЗЕЦ:** $y=2$ и $y=-1$

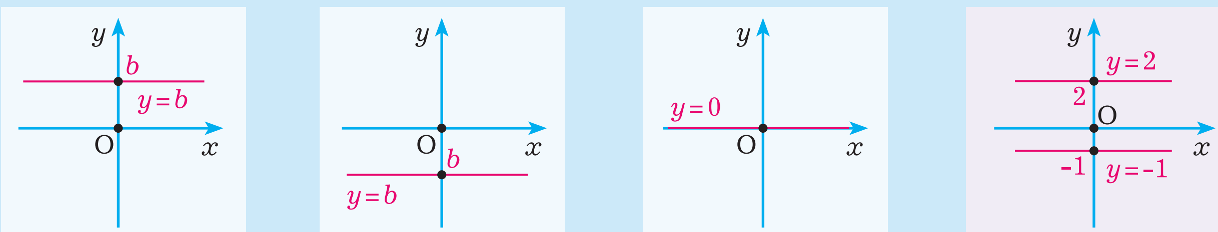


РИСУНОК 6

При $a > 0$ график функции $y = ax + b$ образует острый угол с положительным направлением оси OX (рисунок 7). При $a < 0$ график функции $y = ax + b$ образует тупой угол с положительным направлением оси OX (рисунок 8).

По рисунку 9 выясните знак коэффициента a и вид угла между графиком и осью OX.

Острый угол: $a > 0$

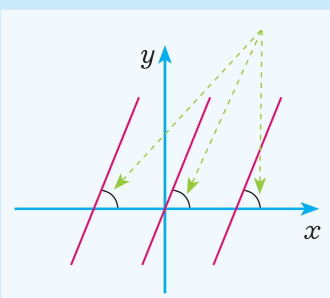


РИСУНОК 7

Тупой угол: $a < 0$

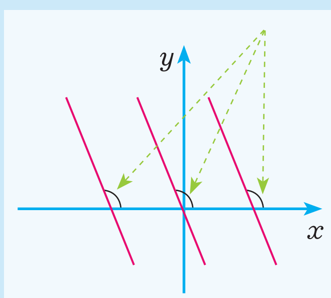


РИСУНОК 8

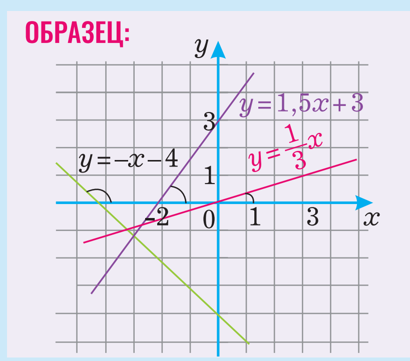


РИСУНОК 9

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Какие из следующих функций являются линейными функциями вида $y = ax + b$ Почему? В каждой линейной функции определите a и b.

a) $y = x - 3$; **b)** $y = -7x$; **c)** $y = x^2 + 6$; **d)** $y = 10$; **e)** $y = \frac{x}{5} - 1$.

2. a) Какая фигура получится в прямоугольной системе координат, если последовательно соединить отрезками точки с абсциссами 5? Какой формулой можно описать полученную линию?

b) Какую фигуру образуют точки, соответствующие графику функции $y = -2$

3. Постройте график функции $y = x + 2$: По графику определите какие из точек

a) $M(0; 2), N(1; 3), A(-1; 1), B(-4{,}7; -2{,}7), C\left(-2\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ лежат на этом графике.

b) Как можно выяснить принадлежность этих точек графику функции $y = x + 2$ без построения графика?

4. Геометрия: Формулы периметра и площади квадрата являются функциями, зависящими от длины стороны квадрата. По информации, представленной в таблицах, выясните какая из функций является линейной и запишите её формулу:

a)

Длина стороны, a	1	2	3	4	5
Периметр, p	4	8	12	16	20

b)

Длина стороны, a	1	2	3	4	5
Площадь, s	1	4	9	16	25

5. Составьте таблицу значений для заданных линейных функций. Выясните, в каких четвертях расположены графики этих функций.

a) $y = 2x + 1$; **b)** $y = -3x$; **c)** $y = \frac{1}{5}x - 1$; **d)** $y = 7 - 1{,}5x$.

В каких точках графики функций пересекаются с осями OX и OY?

6. Составьте таблицу значений x и y по рисунку 10 и запишите формулу функции. Какой угол образует график функции с положительным направлением оси OX в каждом случае?

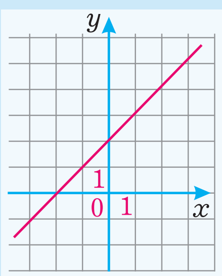


РИСУНОК 10, a

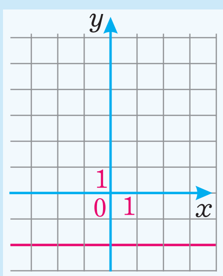


РИСУНОК 10, b

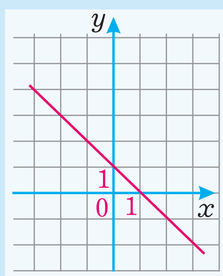


РИСУНОК 10, c

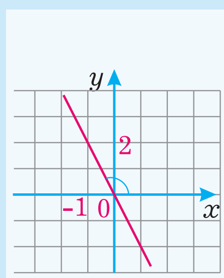


РИСУНОК 10, d

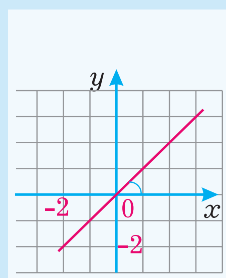


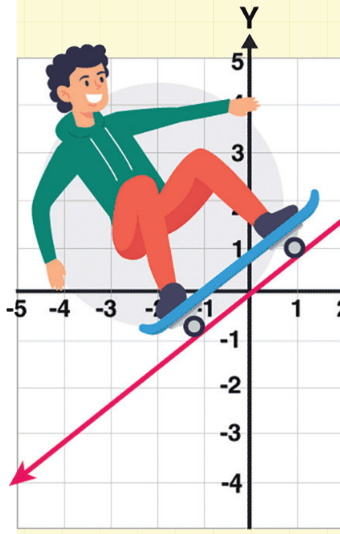
РИСУНОК 10, e

7. Какую прямую образуют точки с абсциссой 0? Какую прямую образуют точки с ординатой 0? Задайте эти прямые формулами.

8. Функция $y = kx$ является частным случаем функции $y = kx + l$:

a) Какая точка всегда принадлежит графику функции $y = kx$ вне зависимости от значений κ?

b) Координаты скольких точек достаточно знать, чтобы построить график функции прямой пропорциональности? Как по-вашему, какую точку желательно рассматривать?



9. Исследуя графики линейных функций, Джамал пришёл к следующим выводам. Выразите ваше отношение к его утверждениям, обоснуйте, какой из этих выводов верен, а какой нет:

a) график функции $y = 5x + 2$ пересекает ось ординат в точке $(0;\ 2)$;

b) график функции $y = -3x - 1$, образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс и не пересекает ось ординат;

c) графики функций $y = \dfrac{3x - 4}{2}$ и $y = 1{,}5x - 2$ совпадают;

d) графики функций $y = \dfrac{6x - 10}{5}$ и $y = \dfrac{-6 + 7x}{3}$ пересекают ось ОУ в одной и той же точке.

10. Для функции $y = -\,0{,}5x + 3$ определите:

a) значение y при $x = -12$, b) значение x при $y = -1$.

11. Найдите значение углового коэффициента к функции $y = kx + 2$, если известно, что график функции проходит через точку

a) $\mathrm{M}(-2;\ 4)$; b) $\mathrm{N}(5;\ 2)$

12. Найдите значение свободного коэффициента b функции $y = -3x + b$ если известно, что график функции проходит через точку

a) $\mathrm{A}(-7;\ -12)$; b) $\mathrm{B}(3;\ -7)$

13. Определите знаки коэффициентов k и l линейной функции $y = kx + l$ по рисунку 11.

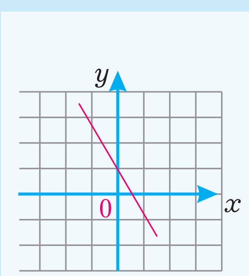


РИСУНОК 11, a

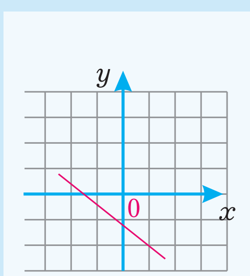


РИСУНОК 11, b

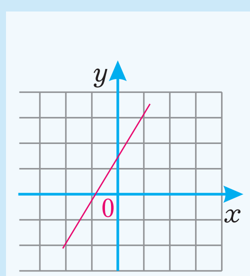


РИСУНОК 11, c

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 7

3 Взаимное расположение графиков линейных функций

Возможны три случая взаимного расположения двух прямых линий (рисунок 12 a, b, c).

Вспомните: Каково взаимное расположение двух прямых?

РИСУНОК 12, a

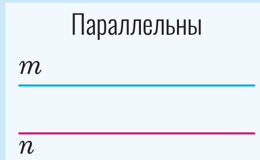


РИСУНОК 12, b

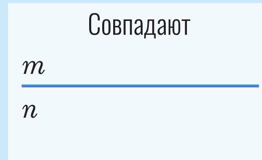


РИСУНОК 12, c

Выяснить как расположены две прямые заданные формулами, можно без построения самих прямых. Рассмотрим значения a_1 и a_2, b_1 и b_2 при различных взаимных положениях прямых, заданных формулами $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$

ПРЯМЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ

Если $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$ прямые $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ параллельны (рисунок 13)

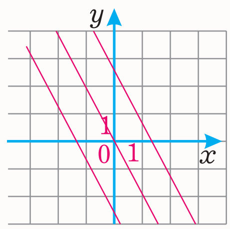


РИСУНОК 13

ОБРАЗЕЦ: Прямые $y = -2x + 2$, $y = -2x$, $y = -2x - 1$ параллельны

ПРЯМЫЕ СОВПАДАЮТ

При $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ прямые $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ совпадают (рисунок 14)

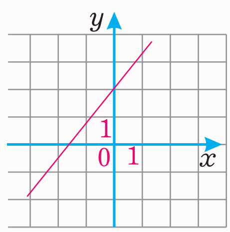


РИСУНОК 14

ОБРАЗЕЦ: $y = 5x + 2$, $y = 2 + 5x$, düz xətləri üst-üst-ə düşür.

ПРЯМЫЕ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ

При $a_1 \neq a_2$ прямые $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ пересекаются в одной точке. Здесь b_1 и b_2 могут совпадать или не совпадать (рисунок 15)

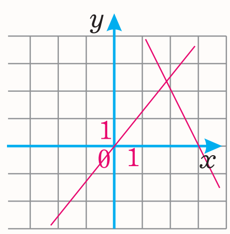


РИСУНОК 15

ОБРАЗЕЦ: Прямые $y = 7x + 1$, $y = 6x$, $y = -3x + 4$, $y = x - 3,1$ пересекаются.

ПРИМЕР: Выясните взаимное расположение графиков линейных функций $y = 2x$, $y = -2x$, $y = 2 + x$, $y = 3x + 1$, $y = 2x - 5,2$, $y = x + 2$ и $x + 2 - y = 0$

РЕШЕНИЕ: Исследуем угловой и свободный коэффициенты линейных функций:

1) Так как угловой коэффициент функций $y = 2x$ и $y = 2x - 5,2$ равен 2, то графики этих функций параллельны

2) Графики функций $y = 2 + x$, $y = x + 2$ и $x + 2 - y = 0$ совпадают, так как у них и угловые коэффициенты и свободные коэффициенты одинаковы. Здесь выражение $x + 2 - y = 0$ можно записать как $y = x + 2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите взаимное расположение графиков функций:

a) $y = 3x$ и $y = 3x + 5$;
b) $y = x + 5$ и $y = -3x + 1$;
c) $y = 7x + 1$ и $y = -7x - 1$;
d) $y = x - 11$ и $y = \dfrac{0{,}1x - 1{,}1}{0{,}1}$.

2. Можно ли утверждать, что графики нижеуказанных функций параллельны? Почему?

a) $y = \frac{15}{3}x + 2$ и $y = 5x - 2$;
b) $y = \frac{10}{15}x - 1$ и $y = \frac{2}{3}x - 3$;
c) $y = x + 4$ и $y - x = 4$;
d) $y = \frac{5}{6}x + 7$ и $y = \frac{6}{5}x + 7$.

3. Функция прямо пропорциональной зависимости y от x имеет вид $y = кx$. Для нижеуказанных случаев найдите коэффициент $к$ и запишите формулу функции. Выясните взаимное расположение полученных прямых:

a) $x = 8$, $y = 14$;
b) $x = -3$, $y = 9$;
c) $x = 5$, $y = 12$;
d) $x = -8$, $y = -6$;
e) $x = 1{,}5$, $y = 6$;
f) $x = 2{,}5$, $y = 7$;
g) $x = 9$, $y = -1{,}8$;
h) $x = -0{,}5$, $y = 3$;
m) $x = 4$, $y = -3$.

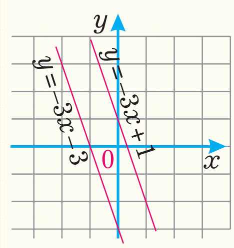


РИСУНОК 16, a

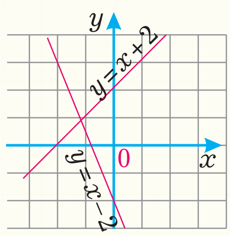


РИСУНОК 16, b

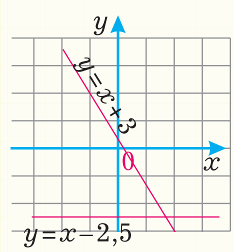


РИСУНОК 16, c

4. Найдите ошибку в построении графика (рисунок 16, a, b, c). Как должны располагаться графики функций? Ответ обоснуйте правильным построением графиков.

5. Постройте графики заданных функций в одной и той же системе координат и выясните взаимное расположение графиков. Для каждого графика определите угловой коэффициент.

a) $f(x) = -3x + 7$ и $g(x) = 0{,}5x - 2{,}5$;
b) $y = x + 9$ и $y = x - 7$;
c) $h(x) = 1 - x$ и $g(x) = x - 4$;
d) $y = -x + 5$ и $y = 0{,}2 - x$.

Как расположены прямые с разными угловыми коэффициентами? Что вы можете сказать о взаимном расположении прямых с одинаковыми коэффициентами при x?

6. Вместо звёздочки в равенствах впишите такие числа, чтобы графики были:

1) параллельны;
2) пересекались;
3) совпадали, если возможно.

a) $y = *x$ və $y = *x + 5$;
b) $y = *x + 19$ və $y = -*x + 9$;
c) $y = *x + 0{,}4$ və $y = -*x + 0{,}4$;
d) $y = *x - 1{,}5$ və $y = x - 1{,}5$;
e) $y = \frac{1}{*}x + 5$ və $y = *x - *$;
f) $y = *x - 7$ və $y = \frac{*}{5}x + \frac{6}{5}$.

4 Линейное уравнение с двумя переменными и её график

I. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение вида $\boldsymbol{ax + by = c}$ называется **линейным уравнением с двумя** переменными.

ВНИМАНИЕ: Степень линейного уравнения с двумя переменными равна 1

Здесь a и b коэффициенты при переменных, c – свободный коэффициент, x и y – переменные. Например, $2x - 3y = 5$– линейное уравнение с коэффициентами: $a=2$, $b=-3$, $c=5$.

Пара значений переменных, при которых уравнение обращается в верное равенство, называется **корнем** (решением) уравнения.

Корень уравнения $ax + by = c$ записывается в виде пары (x, y) .
Уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечное число корней.

Например, один из корней уравнения $2x - 3y = 5$ есть $(1, -1)$, так как при $x=1$ и $y=-1$, $2x - 3y = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3= 5$.

Запомните: В линейном уравнении с двумя переменными можно одну переменную выразить через другую.

ПРИМЕР: В уравнении $5x - 2y = 8$:

1) Выразите переменную y через x;
2) Выразите переменную x через y;
3) что можно сказать о корне уравнения $5x - 2y = 8$?

РЕШЕНИЕ:

1) $5x - 2y = 8,$ из каждой стороны равенства вычтем $5x$,
$5x - 2y - 5x = 8 - 5x,$ сделаем приведение подобных слагаемых,
$-2y = 8 - 5x,$ обе стороны равенства разделим на -2,
$-2y : (-2) = (8 - 5x) : (-2),$
$y = 2{,}5x - 4$ это есть выражение y через x.

2) $5x - 2y = 8,$ к каждой стороне равенства прибавим $2y$.
$5x - 2y + 2y = 8 +2y,$ сделаем приведение подобных слагаемых.
$5x = 8 + 2y,$ обе стороны равенства разделим на 5.
$5x : 5 = (8 + 2y) : 5,$
$x = 1{,}6 + 0{,}4y$ это есть выражение x через y.

3) $5x - 2y = 8$. Любая пара чисел, обращающая уравнение в верное равенство, может считаться корнем уравнения. Подставив вместо x некоторое число, вычисляется значение y. Полученная пара чисел записывается в виде $(x; y)$. Это и есть корень уравнения.

Можно было вместо y подставить некоторое число и вычислить x.

Например, Если принять $x = 1$, то $5 \cdot 1 - 2y = 8$ и тогда, $y = -1{,}5$. Значит, $(1; -1{,}5)$ есть корень уравнения $5x - 2y = 8$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Являются ли данные уравнения линейными уравнениями с двумя переменными?

a) $3x - y = 11$; **b)** $xy + x = -8$; **c)** $m - 2n = 9$;
d) $2 = 3x + 10y$; **e)** $12x + 6y = 0$; **f)** $s + 3t = -2$;
g) $8x^2 - 4y = 5$; **h)** $0{,}6x - 4y = -3$.

Выпишите коэффициенты a, b и c в линейных уравнениях с двумя переменными вида $ax + by = c$.

2. Какие из пар значений x и y таблицы

x	-5	-4	-3	-2	0	4
y	0	3	4	-3	-5	-3

являются корнями уровнения:

a) $2x + y = -5$; **b)** $x + 3y = -5$?

3. Какая из пар $(3;-10)$; $(-3; 12)$; $(0{,}1; 11)$; $(1; 2)$; $(2; 1)$ является корнем уравнения $10x + y = 12$?

4. Составьте линейное уравнение с двумя переменными корнем которого является пара чисел: **a)** $x = 3$; $y = 1{,}5$; **b)** $x = 0{,}7$; $y = -5$.
Запишите ещё несколько корней полученного уравнения.

5. В уравнениях выразите переменную y через x и запишите какой-нибудь корень уравнения.

a) $4x + 2y = 7$; **b)** $-5x + y = -12$; **c)** $x + 15y = -30$;
d) $3y - 14x = 21$; **e)** $4x - 5y = 20$; **f)** $-x - y = 0$.

6. В уравнениях выразите переменную x через y и запишите какой-нибудь корень уравнения.

a) $4x + 2y = 7$; **b)** $-5x + y = -12$; **c)** $x + 15y = -30$;
d) $3y - 14x = 21$; **e)** $4x - 5y = 20$; **f)** $-x - y = 0$.

7. Найдите корень уравнения $x + 2y = 11$, состоящий из одинаковых чисел.

8. Найдите коэффициент a, если пара $(2; 1)$ является корнем уравнения $ax + 2y = 8$. Найдите из уравнения y при $x = 5$.

9. 250 пассажиров корабля необходимо разместить в двух- и трёхместны каюта, так чтобы свободных мест не осталось. Сколько двухместных и сколько трёхместных кают на корабле?

10. Сколько монет по 20 гяпик и сколько по 10 гяпик потребуется, чтобы разменять 1 манат? Исследуйте возможные варианты.

11. Какие из линейных уравнений с двумя переменными равносильны?

a) $2x + 5y = 12$; b) $2y + 5x = 12$;

c) $y = -0{,}4x + 2{,}4$; d) $x = 6 - 2{,}5y$.

12. Равенства запишите в виде линейного уравнения с двумя переменными $(ax + by = c)$:

a) $y = \frac{6x-11}{7}$; b) $y = \frac{3x}{5} + \frac{2}{5}$; c) $x = \frac{-y+9}{12}$; d) $x = \frac{y}{4} - \frac{11}{12}$.

II. ГРАФИК ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Множество точек на координатной плоскости, координаты которых являются корнем уравнения $ax + by = c$, образуют прямую линию. Эту прямую называют **графиком данного** уравнения.

- При $a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ уравнение $ax + by = c$ приводится к виду $by = c$ и $y = \frac{c}{b}$. В этом случае графиком уравнения будет прямая, параллельная оси ОХ, пересекающая ось ОУ в точке $(0; \frac{c}{b})$.
- При $b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0$ уравнение $ax + by = c$ приводится к виду $ax = c$ и $x = \frac{c}{a}$. В этом случае графиком уравнения будет прямая, параллельная оси ОУ, пересекающая ось ОХ в точке $(\frac{c}{b}; 0)$.

В уравнении $ax + by = c$ хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля. Если выразить y через x, получим $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Здесь при $b \neq 0$, обозначив $k = -\frac{a}{b}$ и $l = \frac{c}{b}$, уравнение приведем в виду $y = kx + l$ – формула линейной функции.

Таким образом, графиком линейного уравнения $ax + by = c$ является график линейной функции $y = kx + l$.

В частном случае при $c = 0$ из уравнения $ax + by = c$ получится $ax = by$ və $y = \frac{b}{a}x$ – прямо пропорциональная зависимость.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из нижеуказанных точек принадлежат линии, заданной уравнением $3x + 4y = 12$?

a) $A(1; 3)$; b) $B(0,4; 0)$; c) $C(0; 3)$; d) $D(3; 1)$; e) $E(-6; 7,5)$.

2. Могут ли координаты одной и той же точки быть корнем нескольких уравнений? Как расположены в этом случае линии, заданные этими уравнениями?

a) Проходят ли линии, заданные уравнениями

$3x - y = -5$; $-x + 10y = 21$; $11x + 21y = 31$

через точку $A(-1; 2)$? Почему?

b) Существует ли точка принадлежащая всем трём линиям, задаваемым уравнениями

$0,2x + 3y = 4,5$; $-x + 4y = 6$; $5x - 2y = -3$?

Если существует, то найдите её координаты?

3. Постройте линии, заданные уравнениями:

a) $2x - y = 6$; b) $x + 6y = 0$; c) $1,6x = -6,4$;
d) $1,5x + 2y = 3$; e) $0,5x - y = 1$; f) $5,4\text{y} = 10,8$.
g) $x - y - 2 = 0$; h) $2(x - y) + 3\text{y} = 4$; m) $2x = y + 4$.

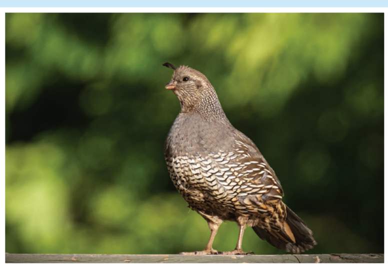
4. a) Найти a, если известно, что линия, заданная уравнением $24x - 15y = 42$ проходит через точку $A(3; 2a)$.

b) Найти a, если известно, что линия, заданная уравнением $6x + 9y = -21$ проходит через точку $B(a; -5)$.

5. Сколько в саду кроликов и сколько куропаток, если известно, что общее число их лапок 24.

a) Для решения поставленной задачи составьте линейное уравнение с двумя переменным.

b) Постройте график полученной линейной функции.



Обобщающие задания

1. Найдите точки пересечения графика функции $2x + 3y = 7$ с осями ОХ и ОУ (рисунок 17).

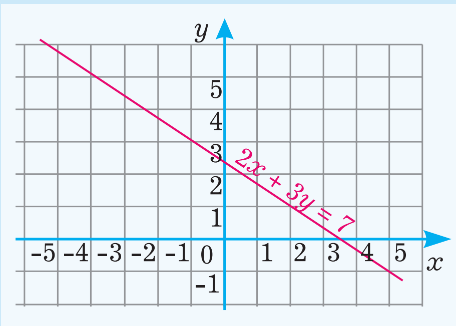
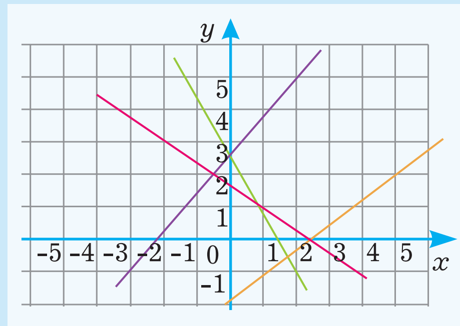


РИСУНОК 17

РИСУНОК 18



2. Установить на рисунке 18 соответствие между прямыми линиями и данными уравнениями:

a) $2x + 3y = 5$; b) $2x - 3y = 5$; c) $2y + 3x = 5$; d) $2y - 3x = 5$.

3. Выразите мнение о корнях уравнения $4x - 9y = 9y + 4x - 7$.

4. Школьник за 5 тетрадей и 6 ручек заплатил 2 маната 10 гяпиков. Одна тетрадь стоит 30 гяпик. Сколько гяпиков стоит одна ручка?

5. Постройте линии, заданные уравнениями $x = 4$ и $x = -2$ Выразите мнение об этих линиях.

6. Постройте в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями $x + y = 1$, $x - y = 1$, $y - x = 1$ и $-x - y = 1$ Что вы можете сказать о фигуре, ограниченной этими линиями?

7. Постройте в прямоугольной системе координат линии, заданные уравнениями $x + y = 3$ и $x - 2y = -3$. Запишите координаты точки пересечения этих прямых.

Проверьте себя

8. Мастер работал 3 дня, ученик 2 дня. Вместе они изготовили 400 деталей. Сколько деталей изготовил каждый? Запишите какой-нибудь возможный ответ.

a) Для решения поставленной задачи запишите уравнение с двумя переменными.

b) Исследуйте и найдите, какая пара чисел является корнем уравнения:

1) (100; 50); **2)** (30; 155); **3)** (270; 130); **4)** (90; 65).

УКАЗАНИЕ: Принять $y = 4n$.

9*. Решите уровнение $8x + 14y = 32$, зная, что корень состоит из целых чисел.

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАЗДЕЛ 8

Два или несколько уравнений, взятых вместе, образуют так называемую систему уравнений. В этом разделе мы представим вам несколько способов решения систем уравнений

В этом разделе вы ознакомитесь со способами решения систем линейных уравнений с двумя переменными. При решении систем уравнений вам нужно будет выбрать более целесообразный способ: взаимного расположения графиков прямых линий, выражение одной переменной через другую или сложение соответствующих сторон уравнений. Вы научитесь решать ситуационные задачи составлением систем уравнений.

РАЗДЕЛ 8

1 Система линейных уравнений с двумя переменными

ВНИМАНИЕ: Коротко будем называть **линейной системой уравнений**.

Системой линейных уравнений с двумя переменными называется совместная запись двух или нескольких уравнений.

Например: $x + 3y = -4$ və $x + y = 0$ совместная запись двух уравнений выглядит так: $\begin{cases} x+3y=-4 \\ x+y=0 \end{cases}$

Общий вид **системы линейных уравнений с двумя переменными:** $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

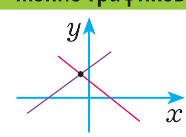
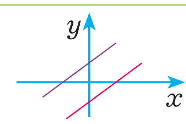
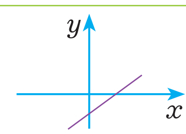
Здесь числа a_1 , b_1, a_2, b_2 коэффициенты, c_1 и c_2 свободные коэффициенты, x и y – переменные.

Пара чисел (x; y), обращающих каждое уравнение системы в верное равенство, называется **корнем** системы уравнений.

Решить систему уравнений – это значит или найти все корни системы, или же показать, что корней нет.

Известно, что на плоскости две прямые линии или параллельны, или пересекаются, или же совпадают. Так как графики уравнений, входящих в систему $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ являются прямыми линиями, то их взаимное расположение тоже может быть трех видов: параллельность, пересечение, совпадение.

Взаимное расположение графиков уравнений системы линейных уравнений с двумя переменными связано с отношениями коэффициентов этой системы:

	Соотношение коэффиц	Число корней	Объяснение	Взаиморасположение графиков
Отношения соответствующих коэффициентов различны	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	У системы уравнений есть только один корень.	Графики уравнений системы пересекаются в одной точке.	
Отношения соответствующих коэффициентов равны, но отличаются от отношения свободных коэффициентов	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	У системы уравнений нет корня.	Графики уравнений системы параллельны.	
Отношения соответствующих коэффициентов и свободных коэффициентов равны	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	У системы уравнений есть бесконечное множество корней.	Графики уравнений системы совпадают.	

ПРИМЕР: Выясните число корней системы уравнений:

a) $\begin{cases}3x+2y=6\\5x-y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+5y=1\\4x+10y=5\end{cases}$ c) $\begin{cases}4x-6y=9\\2x-3y=4{,}5\end{cases}$

РЕШЕНИЕ: a) Найдем отношения соответствующих коэффициентов системы уравнений. $\begin{cases}3x+2y=6\\5x-y=2\end{cases}$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{5}=0{,}6$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{-1}=-2$. Как видим, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ значит система имеет единственный корень, то есть графики уравнений системы пересекаются в одной точке.

b) Найдем отношение соответствующих коэффициентов системы уравнений. $\begin{cases}2x+5y=1\\4x+10y=5\end{cases}$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{4}=0{,}5$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{5}{10}=0{,}5$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{1}{5}=0{,}2$. Как видим, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ Значит, система не имеет корней, графики ее уравнений параллельны.

c) Найдем отношение соответствующих коэффициентов системы уравнений. $\begin{cases}4x-6y=9\\2x-3y=4{,}5\end{cases}$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{2}=2$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-6}{-3}=2$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{9}{4{,}5}=2$. Так как $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное число корней, а графики уравнений системы совпадают.

ЗНАЧЕНИЕ:

Вопрос о числе корней системы уравнений можно решить приведя каждое уравнение системы к виду $y = kx + b$ и исследовав коэффициенты k и b.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Данные линейные уравнения с двумя переменными запишите в виде системы и выпишите соответствующие коэффициенты и свободные коэффициенты:

a) $x - 4y = 1$ и $2x + y = 0$; b) $a + 7b = -1$ и $b - 3a = 2$;

c) $z + t = 9$ и $2t + z = -3$; d) $m - n = 10$ и $n - 2m = 0$.

2. Выпишите коэффициенты и свободные коэффициенты системы уравнений:

a) $\begin{cases}2x+5y=-1\\-7x+y=2\end{cases}$; b) $\begin{cases}0{,}5x+3{,}1y=4\\x+1{,}2y=1\end{cases}$; c) $\begin{cases}3y=3x-2\\6x=y+5\end{cases}$.

3. Обращает ли пара (1; 3) каждое уравнение системы $\begin{cases}3x-4y=-9\\5x+2y=17\end{cases}$ в верное равенство? Ответ обоснуйте.

4. Является ли пара чисел a) $x = 3;\ y = 1$; b) $x = 2,\ y = 2$

Корнем системы $\begin{cases}x+y=4\\2x-y=2\end{cases}$. Объясните, как вы это проверили.

5. В каждом уравнении системы выразите y через x. По полученным равенством выясните взаимное расположение графиков:

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 1{,}5x+4{,}2y=-1 \\ 10x-7y=4{,}7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 8x=2y+4 \\ 4x-y=10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 5x-1=4 \\ 2x+6y=11 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=12 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+3y=7 \\ 5x-y=9 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 0{,}6x-y=3 \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{4}y=2 \end{cases}$; m) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=8 \\ \dfrac{3x}{7}=1+\dfrac{5y}{4} \end{cases}$

6. Составьте систему линейных уравнений с двумя переменными, для которой пара чисел: a) $x=5$, $y=-1$; b) $m=0$, $n=10$ является корнем.

7. Составьте такую систему линейных уравнений с двумя переменными, чтобы графики уравнений были бы:

a) параллельны; b) пересекались; c) совпадали.

8. При каком значении a система не имеет корней?

a) $\begin{cases} ax-y=2 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x-ay=7 \\ 7x-8y=9 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x+ay=-5 \\ 4x-12y=15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x+3y=0 \\ ax-8y=-2 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 4x+\dfrac{4}{5}y=4 \\ 2x-ay=-20 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \dfrac{x}{7}+y=0{,}8 \\ 2x-\dfrac{ay}{2}=1{,}2 \end{cases}$

9. При каком значении b система имеет бесконечное число корней?

a) $\begin{cases} 10x-by=4 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 12x+by=15 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 9y+bx=-2 \\ 0{,}5x+7{,}2y=-1{,}6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x+by=2{,}7 \\ 5x-3y=1{,}5 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 0{,}4x+\dfrac{2}{5}y=-8 \\ x-by=-20 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{7}y=3 \\ bx+\dfrac{y}{28}=0{,}75 \end{cases}$

10. При каком значении m система имеет единственный корень?

a) $\begin{cases} mx+8y=12 \\ 18x-3y=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x+my=-6 \\ 9x-18y=20 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 24y+8x=-3 \\ 3x-2my=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx+3y=5 \\ 2x-y=2 \end{cases}$; e) $\begin{cases} mx+(m-1)y=3 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \dfrac{7}{15}x+\dfrac{4}{5}y=12 \\ mx-\dfrac{3}{8}y=1\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 8

2 Графический способ решения системы линейных уравнений с двумя переменными

Существует несколько способов решения системы линейных уравнений. Один из них – **графический способ**.

Чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ графическим способом надо построить график каждого уравнения системы. В дальнейшем возможны три случая:

- Если графики пересекаются, то координаты точки пересечения являются корнем системы;
- Если графики параллельны, то система не имеет корней;
- Если графики совпадают, то система имеет бесконечное число корней.

ПРИМЕР: Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ графическим способом.

РЕШЕНИЕ: Выразим у через х в каждом уравнении системы:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

Построим график каждой из полученных линейных функций:

1) $y = 2x - 4$

x	y
0	–4
2	0

2) $y = 5 - x$

x	y
0	5
5	0

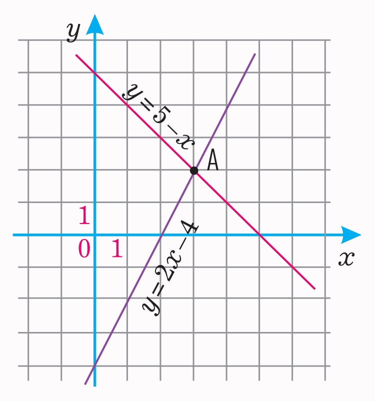


РИСУНОК 1

Как видно из рисунка 1 графики функций $y = 2x - 4$ и $y = 5 - x$ пересекаются в точке A(3; 2). Значит, корень системы – (3; 2)

Ответ: (3; 2).

Так как точно определить координаты точки пересечения иногда бывает довольно трудно, решение системы уравнений графическим способом не всегда целесообразно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В системах линейных уравнений выразите y через x:

a) $5x - y = 12$; b) $-3x + 4y = -7$;

c) $x + 0{,}5y = 9$; d) $1{,}3y - x = 1{,}(7)$.

2. Найдите корень системы уравнений, представленых графиками на рисунке 2.

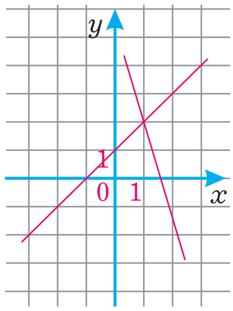


РИСУНОК 2, a

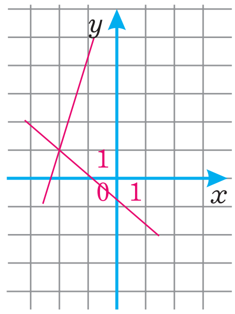


РИСУНОК 2, b

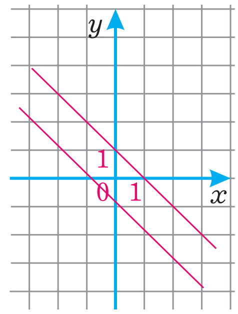


РИСУНОК 2, c

3. Как можно проверить, что пары чисел $(0;\ -3)$, $(-2;\ 0)$, $(-6;\ 2)$ являются корнем системы:

a) $\begin{cases} x = y - 8 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x = y + 3 \\ 2y - 5x = -6 \end{cases}$

4. Даны уравнения $y = 2x - 3$ и $x + y = 3$.

a) Подберите пару чисел, удовлетворяющих каждому уравнению системы. Подставив числа вместо x и y проверьте ваш ответ.

b) Постройте графики этих уравнений и выпишите координаты точки пересечения графиков.

Совпали ли подобранные вами числа с координатами точки пересечения?

5. Решите систему уравнений графическим способом:

a) $\begin{cases} y = 2x \\ y - x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -3x \\ y - x = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

6. Найдите точки пересечения графиков уравнений системы с осями ОХ и ОУ, соедините эти точки прямыми линиями и найдите координаты точек пересечения построенных прямых:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

7. Составьте такое линейное уравнение с двумя переменными, чтобы один из его корней являлся парой координат точки пересечения графика уравнения $5x + y = 2$ с осью OX.

8. Составьте такое линейное уравнение с двумя переменными, чтобы один из его корней являлся парой координат точки пересечения графика уравнения $4x - y = 5$ с осью OY

9. Составьте такое линейное уравнение с двумя переменными, что бы оно в системе с уравнением $-x - 2y = 6$

a) имело единственный корень;

b) имело бесконечное число корней; c) не имело корней.

10. Составьте такие линейные уравнения с двумя переменными, чтобы их графики:

a) были параллельными; b) пересекались; c) совпадали.

11. Сначала без построений определите число корней системы уравнений. Затем проверьте ответ построив графики.

a) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + 10y = -14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x = 11 - 2y \\ 4x + 4y = 22 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ -0,5x = y \end{cases}$ f) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

12. Запишите систему линейных уравнения с двумя переменными, графики которых изображены на рисунке.

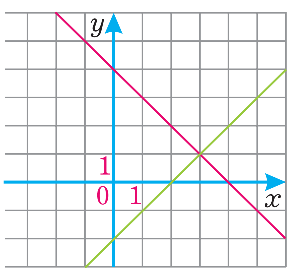


РИСУНОК 3, a

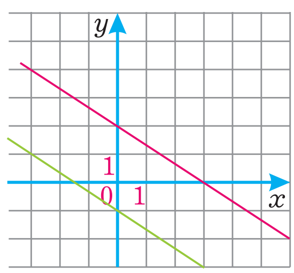


РИСУНОК 3, b

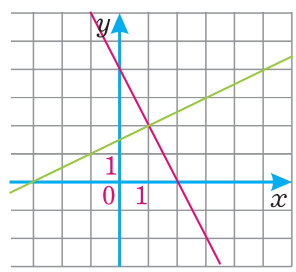


РИСУНОК 3, c

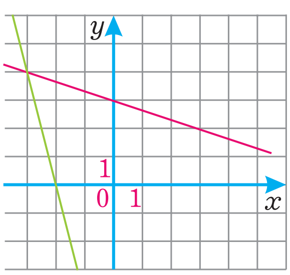


РИСУНОК 3, d

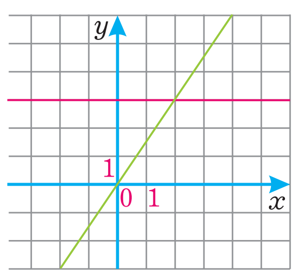


РИСУНОК 3, e

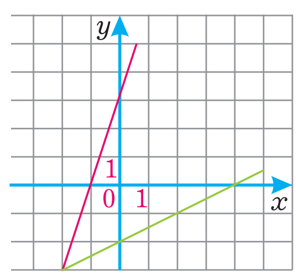


РИСУНОК 3, f

3 Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

$\Leftrightarrow$
знак равносильности уравнения

$3x + 2y = 5$ и
$y = -1{,}5x + 2{,}5$,
$x = -\frac{2}{3}y + 1\frac{2}{3}$
равносильны.

Как вам известно, в линейном уравнении с двумя переменными можно одну переменную выразить через другую. Полученные уравнения будут равносильны.

Например: в уравнении $3x + 2y = 5$, если выразить y через x, получим $y = -1{,}5x + 2{,}5$, если же выразить x через y, то $x = -\frac{2}{3}y + 1\frac{2}{3}$.

При решении системы линейных уравнений с **двумя переменными** часто применяют способ подстановки:

ПРИМЕР 1:
Решите систему уравнений способом подстановки $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$:

I ШАГ: В одном из уравнений системы одна переменная выражается через другую.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

в системе уравнений в первом уравнении запишем

$x = 3 - 2y$ запишем.

II ШАГ: Выраженное значение переменной подставляется во второе уравнение системы.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + y = 9 \end{cases}$$

III ШАГ: Решается полученное линейное уравнение с одной переменной.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = -1 \end{cases}$$

IV ШАГ: Найденное при III шаге значение переменной подставляется в одно из уравнений системы и определяется значение второй переменной. Полученная пара чисел является корнем (x; y) заданной системы уравнений.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2\cdot(-1) \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (5, -1)$$

V ШАГ: Подставлением найденной пары чисел в уравнения системы проверяется верность найденного корня.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 2\cdot(-1) = 3 \\ 2\cdot 5 + (-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ 9 = 9 \end{cases}$$

Так как равенства оказались верными, значит пара (–5; 1) есть корень системы.

ПРИМЕР 2: Решить систему $\begin{cases} 3m+4n=3 \\ 2m-3n=19 \end{cases}$ способом подстановки.

РЕШЕНИЕ: В первом уравнении системы выразим n через m и подставим во второе уравнение вместо n:

$$\begin{cases} 3m+4n=3 \\ 2m-3n=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n=3-3m \\ 2m-3n=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{3-3m}{4} \\ 2m-3n=19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{3-3m}{4} \\ 2m-3\cdot\dfrac{3-3m}{4}=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{3-3m}{4} \\ 8m-9+9m=76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{3-3m}{4} \\ 17m=85 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{3-3\cdot 5}{4} \\ m=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-3 \\ m=5 \end{cases}$$

Ответ: $(5, -3)$.

Запомни: Какую переменную выразить через другую зависит от вашего выбора.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В приведённых линейных уравнениях с двумя переменными выразите:

1) переменную x через y, **2)** переменную y через x.

a) $5x - y = 12$; **b)** $x + 7y = -9$;

c) $8x - 15y = 10$; **d)** $5y - 3x = 3$.

Объясните, какую переменную удобнее заменить через другую в каждом уравнении. Обоснуйте свой ответ.

2. На рисунке 4 весы находятся в равновесии. Каждая красная гиря имеет массу a г., синяя-b г., желтая-1 г. Запишите по рисунку систему линейны уравнений с двумя переменными.

a)

b)

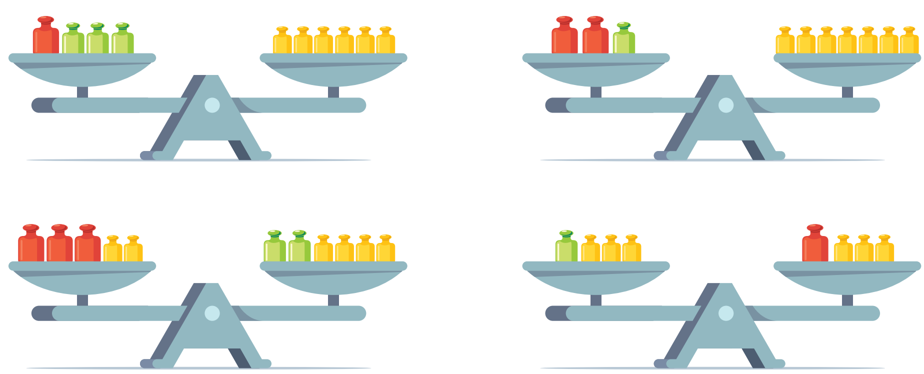


РИСУНОК 4

3. Решите систему уравнений способом подстановки:

a) $\begin{cases} x = 2 + y \\ x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x = y - 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 11 - 2x \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a + 5b = 7 \\ 3a - 2b = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} m - 3n = 17 \\ m - 2n = -17 \end{cases}$ f) $\begin{cases} p + 12q = 11 \\ 5p - 3q = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2k = t + 0{,}5 \\ 3k - 5t = 12 \end{cases}$ m) $\begin{cases} 25 - x = -4y \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$

4. Сначала упростите систему, затем решите способом подстановки.

a) $\begin{cases} 3(x-5) - 1 = 6 - 2x \\ 3(x-y) - 7y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6(m+n) - n = -1 \\ 7(n+4) - (n+2) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2(a-b) + 16 = 3(b+7) \\ 6a - (a-5) = -8 - (b+1) \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5y + 8(x-3y) = 7x - 12 \\ 9x + 3(x-9y) = 11y + 46 \end{cases}$

Вспомните:
Вспомните свойства пропорций.

5. Упростите и найдите корень системы уравнений:

a) $\begin{cases} \dfrac{5x-y}{3} = 2 \\ \dfrac{x+10y}{2} = -1\dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2a+b}{4} = 2 \\ \dfrac{3b+a}{4} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{5m+2n}{5} = 1{,}4 \\ \dfrac{3m+n}{4} - 1 = 0 \end{cases}$

УКАЗАНИЕ:
Избавьтесь от дробей умножением обоих сторон уравнения на общий знаменатель.

6. Упростите уравнения системы избавлением от дробей и решите способом подстановки:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = -4 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{a}{6} - 2b = 6 \\ -3a + \dfrac{b}{2} = -37 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{n}{4} - \dfrac{m}{5} = 6 \\ \dfrac{m}{15} + \dfrac{n}{12} = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{5x}{4} - \dfrac{2y}{3} = 3 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{7y}{9} = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{3k}{5} - 2t = 5 \\ k - \dfrac{3t}{2} = 6{,}5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{6c}{5} + \dfrac{d}{15} = 2{,}3 \\ \dfrac{c}{10} - \dfrac{2d}{3} = 1{,}2 \end{cases}$

7. Упростите систему и решите способом подстановки:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{y-x}{2} \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{y-x}{5} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8 \\ \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{m+n}{9} - \dfrac{m-n}{3} = 2 \\ \dfrac{2m-n}{6} - \dfrac{3m+2n}{3} = -20 \end{cases}$

Проверьте себя

8. Корень уравнения, как точка лежит на оси абсцисс. Найдите m и корень системы уравнений.

a) $\begin{cases} (2-m)x + 4my = 6 \\ 3mx + (4m-1)y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx - (m+1)y - 9 = 0 \\ (m-1)y + (m+2)x = 15 \end{cases}$

РАЗДЕЛ 8

4 Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения

Способ сложения – это один из способов решения системы линейных уравнений с двумя переменными, основная цель которого получить и решить одно уравнение с одной переменной .

Чтобы применить способ сложения надо чтобы коэффициенты при одинаковой переменной являлись противоположными числами.

Запомни: При почленном сложении уравнений левые стороны складываются отдельно, правые – отдельно. В дальнейшем после приведения подобных слагаемых получается одно уравнение.

ПРИМЕР 1: $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ решить систему способом сложения.

РЕШЕНИЕ: В системе коэффициенты при переменной у в уравнениях равны 4 и -4. При почленном сложении уравнений (левые стороны отдельно, правые – отдельно) противоположные слагаемые уничтожаются и получается линейное уравнение с одной переменной: $5x = 11$

Найдя корень уравнения $x = 2{,}2$, подставив это значение в любое уравнение исходной системы, мы определим значение второй переменной:

$x = 2{,}2$ подставим в уравнение $3x + 4y = 6$;

$3 \cdot 2{,}2 + 4y = 6$ получим $y = -0{,}15$.

Корень системы уравнений $(2{,}2; -0{,}15)$.

$$+\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ \hline (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y=c_1+c_2 \end{array}$$

$$+\begin{array}{l} 3x+4y=6 \\ 2x-4y=5 \\ \hline 5x+0=11 \end{array}$$

Проверим вычисления:

$$\begin{cases} 3\cdot 2{,}2+4\cdot(-0{,}15)=6 \\ 2\cdot 2{,}2-4\cdot(-0{,}15)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6{,}6-0{,}6=6 \\ 4{,}4+0{,}6=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=6 \\ 5=5 \end{cases}$$

Ответ: $(2{,}2; -0{,}15)$

Если в линейной системе коэффициенты при одинаковых переменных не являются противоположными числами, сложение не приведет к исключению переменных. В этом случае надо обе стороны одного или обоих уравнений умножить на такие числа, чтобы коэффициенты при одной переменной стали противоположными.

ПРИМЕР 2: Решить систему уравнений способом сложения: $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 2x-7y=15 \end{cases}$.

Как можно решать пример 2, приведя к виду с противоположными коэффициентами при y?

РЕШЕНИЕ: Как видим, ни при какой переменной коэффициенты не являются противоположными числами. Коэффициенты при x равны 3 и –2, коэффициенты при y равны 5 и –7. Обратим коэффициенты при х в противоположные числа.

Так как НОК (3; 2) = 6, то обратим коэффициенты при x в 6 и –6. Первое уравнение почленно умножим на 2, второе на –3 и почленно сложим полученные уравнения:

$$\begin{cases} 3x+5y=7 & \cdot 2 \\ 2x-7y=15 & \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+10y=14 \\ -6x+21y=-45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 31y=-31 \\ 2x-7y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 2x-7\cdot(-1)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 3\cdot 4+5\cdot(-1)=7 \\ 2\cdot 4-7\cdot(-1)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7=7 \\ 15=15 \end{cases}$$

Ответ: (4; –1)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выполните следующие действия:

a) каждую сторону уравнения $3x - 4y = 8$ умножьте на “3”;

b) каждую сторону уравнения $8x + 0{,}4y = -6$, умножьте на “2”;

c) каждую сторону уравнения $-1{,}1x - 1{,}9y = 3{,}4$ умножьте на “–10”;

d) каждую сторону уравнения $5y + \frac{7}{15}x = -7$, умножьте на “15”.

Объясните, почему полученные уравнения равносильны исходным.

2. Решите системы уравнений графическим способом, способом сложения и подстановки. Выскажите свое мнение о результатах. Какой из способов оказался более целесообразен?

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-y=7 \\ x+2y=6 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений способом сложения:

a) $\begin{cases} 2x+y=11 \\ 2x-y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=6 \\ 7x+2y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+7y=40 \\ -4x+9y=24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a+3b=17 \\ 2b-a=13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4m+3n=-15 \\ 5m-3n=-3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2p-5q=1 \\ 4p-5q=7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5y+x=3 \\ x+4y=2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2k-3t=6 \\ k-3t=9 \end{cases}$ m) $\begin{cases} 4x+3y=-4 \\ 6x+5y=-7 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 5y-4x=22 \\ 3x+2y=18 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 7c=9d \\ 5c+3d=66 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 5a+6b=0 \\ 3a+5b=4 \end{cases}$

4. График уравнения $y = kx + b$, проходит через нижеследующие точки:

a) $A(5;\ 5)$ və $B(-2;\ -2)$; b) $M(8;\ -1)$ və $B(-4;\ 17)$;

c) $K(4;\ 1)$ və $B(3;\ -5)$; d) $C(-19;\ 31)$ və $B(1;\ -9)$.

Напишите уравнения этих прямых.

5. График уравнения $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках $(-2;\ 0)$ и $(0;\ 6)$. Можно ли утверждать, что уравнение этой линии есть $y = 3x - 6$?

6. График линейной функции пересекает ось OX в точке с абсциссой 6, ось OY – в точке с ординатой – 2. Напишите уравнение этой прямой.

7. Напишите уравнение каждой прямой на основе графиков, данных на рис. 5.

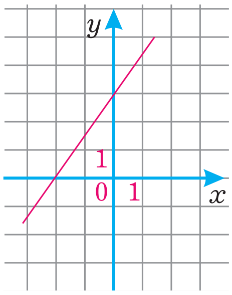


РИСУНОК 5, a

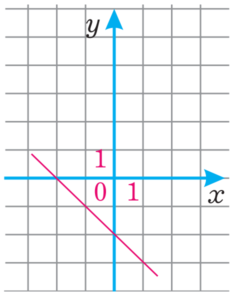


РИСУНОК 5, b

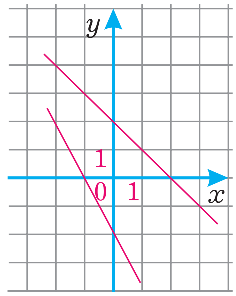


РИСУНОК 5, c

8. Упростите систему уравнений и решите способом сложения:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{2y}{3} = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{m}{4} + \dfrac{n}{4} = 2 \\ \dfrac{m}{6} + \dfrac{n}{3} = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2a + \dfrac{a-b}{4} = 11 \\ 3b - \dfrac{a+b}{3} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}c - \dfrac{1}{12}d = 4 \\ 6c + 5d = 150 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{p}{3} - \dfrac{q}{8} = 3 \\ 7p + 9q = -2 \end{cases}$

9. Упростите уравнения, найдя произведение двучленов, и найдите корень системы способом сложения:

a) $\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} (m+4)(6-n) = (m+2)(9-n) \\ (2m-1)(12-5n) = 2(5m-1)(2-n) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a+5)(b-2) = (a+2)(b-1) \\ (a-4)(b+7) = (a-3)(b+4) \end{cases}$ d) $\begin{cases} (p-2)(q+2) = (p-1)(q-3) \\ (p-4)(2q-1) = 2(p-5)(q+1) \end{cases}$

10. Геометрия: Составьте по данным рисунка 6 линейную систему с двумя переменными.

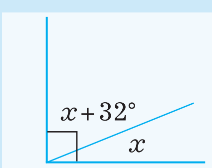


РИСУНОК 6, a

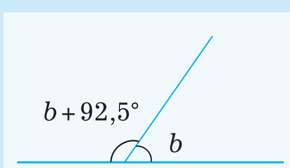


РИСУНОК 6, b

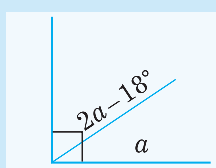


РИСУНОК 6, c

РАЗДЕЛ 8

5 Решение задач с помощью линейных систем уравнений

Чтобы составить линейную систему с двумя переменными по условию задачи надо исследовать условие задачи, выяснить какие величины заданы, а какие неизвестные. Неизвестные обозначить буквами и составить уравнения.

x гяпик

y гяпик

ЗАДАЧА 1: Четыре тетради и восемь ручек стоят 3 маната, три ручки и две тетради – 1 манат 35 гяпик. Сколько стоит 1 тетрадь и 1 ручка?

РЕШЕНИЕ: Цена одной тетради и одной ручки неизвестные. Их соответственно обозначим x гяпик и y гяпик. По условию задачи так как 4 тетради и 8 ручек стоят 3 маната = 300 гяпик, то 4 тетради стоят $4x$, а 8 ручек – $8y$ гяпик.

Первое уравнения системы: $4x + 8y = 300$.

«3 ручки и 2 тетради стоят 1 манат 35 гяпик = 135 гяпик». Второе уравнение имеет вид: $2x + 3y = 135$.

Таким образом по условия задачи получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 300 \\ 2x + 3y = 135 \end{cases}$$

Определим x и y решив систему каким-нибудь способом:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 300 \\ 2x + 3y = 135 \ \big|\cdot(\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 8y = 300 \\ -4x - 6y = -270 \end{cases} \Leftrightarrow$$

почленно сложим

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 30 \\ 2x + 3y = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 \\ 2x + 3 \cdot 15 = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 15 \end{cases}$$

Самостоятельна проверьте удовлетворяют ли полученные числа условиям задачи.

Ответ: ручка стоит 15 гяпик, тетрадь – 45 гяпик.

УПРАЖНЕНИЯ

1. a) Сумма двух натуральных чисел 6, разность равна 4. Найдите эти числа, составив систему уравнений.

b) Разность двух чисел равна 21, отношение как 5 : 12. Найдите эти числа.

2. Сумма двух чисел равна 65, разность равна 29. Составьте систему уравнений и найдите эти числа.

a) Можно ли большее из этих чисел считать равным $(65 + 29) : 2$, а меньшее $(65 - 29) : 2$?

b) сумма двух чисел равна 178, разность равна 93. Найдите эти числа по способу пункта **a)**.

3. a) Найдите произведение чисел, сумма которых равна 118, а разность – $83{,}6$. Полученные числа округлите до целого числа.

b) Найдите такие два числа, у которых разность была бы равна половине их суммы. В этом случае определите, во сколько раз большее число больше меньшего числа. Какую часть большего числа составляет меньшее число? Обоснуйте свой ответ несколькими примерами.

c) Сумма двух чисел равна 68. $\frac{1}{6}$ часть одного числа равна $\frac{2}{5}$ части второго. Найдите эти числа.

4. a) Из 14 м ткани можно сшить 4 мужских и 2 детских пальто, а из 15 м той же ткани 2 мужских и 6 детских пальто. Сколько метров ткани необходимо для одного мужского и одного детского пальто?

b) В 5 больших и 11 маленьких коробках лежит 156 ручек. В большие коробки помещается на 12 ручек больше, чем в маленькие коробки. Сколько ручек в каждой коробке?

c) Два года назад брат был старше сестры в 2 раза, а восемь лет назад – в 5 раз. Сколько лет брату и сестре сейчас?

5. Если Ахмед возьмёт у Эльчина 100 манатов, то у Ахмеда денег будет в два раза больше, чем у Эльчина. Если Ахмед отдаст Эльчину 10 манатов, то у Эльчина денег будет больше в 6 раз, чем у Ахмеда. Сколько денег у каждого мальчика?

6. Каждый день 8 лошадям и 15 коровам даётся 162 кг корма. Известно, что корм, который даётся 5 лошадям, больше корма, который даётся 7 коровам, на 3 кг. Определите, сколько килограмм корма съедает каждая лошадь и каждая корова за день.

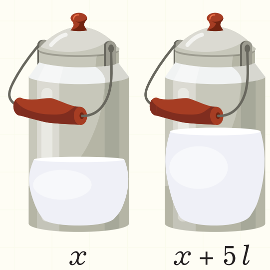
7. В двух баках $140\ л$ воды. После использования из первого бака $26\ л$, а из второго бака – $60\ л$ воды, в первом баке осталось воды в 2 раза больше, чем во втором. Сколько литров воды в каждом баке было первоначально?

8. Составьте задачи на основе приведённых систем уравнений и решите их разными способами.

a) $\begin{cases} x+3y=22 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=30 \\ 2x-y=15 \end{cases}$

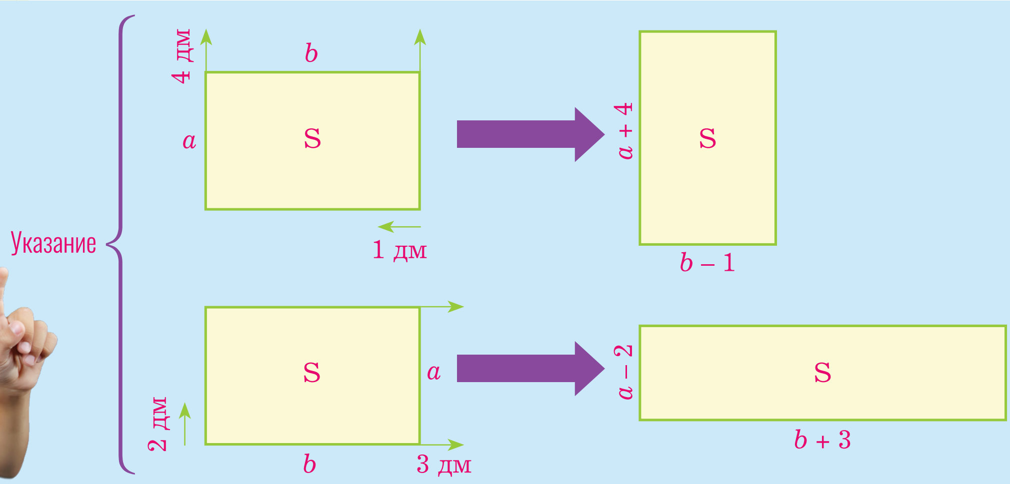
9. Равновесие: На левую чашу весов, находящихся в равновесии, положено 9 одинаковых слитков золота, а на правую чашу – 11 одинаковых слитков серебра. Если поменять местами один слиток золота с одним слитком серебра, то левая чаша станет легче на 13 г. Сколько граммов весит один слиток золота и один слиток серебра?

10. Первый рабочий работал 15 дней, второй – 14 дней и обоим за работу заплатили всего 234 маната. Известно, что сумма денег, полученных за 4 дня работы первого рабочего больше суммы денег, полученных за 3 дня работы второго рабочего на 22 маната. Определите сумму денег, полученных каждым рабочим за 1 день.



11. В одном бидоне на $5\ л$ молока больше, чем в другом. Если перелить из первого бидона во второй $8\ л$ молока, тогда во втором бидоне молока будет в два раза больше, чем в первом бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне?

12. Геометрия. a) если длину прямоугольника увеличить на 4 дм, ширину уменьшить на 1 дм, то площадь его не изменится. Если же длину это прямоугольника уменьшить на 2 дм, а ширину увеличить на 3дм, то площадь опять не изменится. Найдите периметр этого прямоугольника.



b) Длина прямоугольника больше ширины на 4 см. если ширину увеличить в 2 раза, а другую сторону оставить без изменения, то периметр полученного прямоугольника будет равен 56 см. найдите площадь первого прямоугольника.

13. a) 5% одного числа равны 8% другого. Разность 10% первого числа и 9% второго равна $3{,}5$. Найдите сумму этих чисел.

b) Разность двух чисел равна 65, разность их квадратов равна 8775. Найдите сумму этих чисел.

c) Сумма двух чисел равна 125, разность их квадратов равна 8425. Найдите разность этих чисел.

14. a) Сумма значащих цифр двузначного числа равна 14. Если поменять местами значащие цифры, то разность исходного и полученного чисел будет равна 18. Найдите это двузначное число.

b) Сумма значащих цифр двузначного числа равна 9. Разность числа десятков и числа единиц меньше данного числа в 21 раз. Найдите это двузначное число.

15. a) Из двух сел, расстояние между которыми равно 20км, навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода и через 2 часа встретились. Путь который проходит первый пешеход за 4 часа на 19км больше пути, который проходит второй пешеход за 3 часа. Найдите скорости пешеходов.

b) Расстояние между двумя населенными пунктами велосипедист проезжает за 4 часа, мотоциклист за $0{,}8$ часа. Скорость велосипедиста на 48 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Чему равна скорость каждого из них?

16. Моторная лодка на расстояние между двумя мостами, плывя по течению, тратит 4 часа, плывя против течения – 5 часов. Плывя по течению моторная лодка за $3{,}5$ часа проплывает 70 км. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

17. В воскресенье из учеников 7 класса 1 девочка и 5 мальчиков не пришли на репетицию. В результате число девочек оказалось вдвое больше числа мальчиков. Во вторник отсутствовали на репетиции 1 мальчик и 9 девочек. В этот раз число мальчиков оказалов в 1,5 больше числа девочек. Сколько учеников учится в 7-м классе?

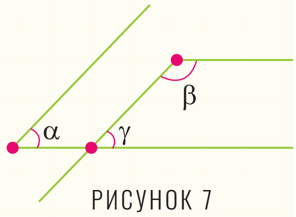


РИСУНОК 7

18. Решите задачу с помощью системы уравнений:

a) Один из двух углов с соответственно параллельными сторонами меньше трехкратной величины другого угла на 26°. Найдите эти углы.

b) Один из двух углов с соответственно перпендикулярными сторонами больше другого на 75°. Найдите эти углы.

19. a) График функции $y = kx + l$ проходит через точки A(3, –2) и B(–2, 3) Найдите k и l.

b) График уравнения $ax + by = c$ проходит через точки M(0,5, –1) и B(–2,4; –3). Найдите $k = -\frac{b}{a}$ и $l = \frac{c}{a}$ в и запишите уравнение $y = кx + l$.

20. Первая бригада рабочих должна отремонтировать 160 м, вторая – 180 м дороги. Первая бригада за день ремонтирует 25 м, вторая – 40 м. Через сколько дней длина неотремонтированной второй бригадой части пути будет в 3 раза больше длины неотремонтированной первой бригадой части пути?

21. В одной коробке в 3 раза больше массы макарон, чем в другой. Из первой коробки использовали 8кг, а во вторую добавили 12 кг, после чего масса макарон в коробках оказалась одинаковой. Сколько макарон (масса) было в каждой коробке изначально?

22. a) 232 кг яблок были распределньы в 8 малых и 6 больших коробок. Масса яблок в малой коробке в 6 раз меньше массы яблок в большой коробке. Сколько кг яблок в малой и сколько в большой коробке.

b) В двух залах кинотеатра вмещается 534 зрителя. В первом зале места расположены в 12 одинаковых рядах, во втором зале – в 15 одинаковых рядах. Число мест в каждом ряде первого зале на 4 больше числа мест в каждом ряде второго зала. Сколько зрительских мест в каждом зале?

Проверьте себя

Обобщающие задания

1. На сколько надо уменьшить число 100, чтобы при делении полученного числа на 5 и на 7 в остатке получалось 2 и неполное частное при первом делении было бы на 4 больше неполного частного при втором делении?

a) Что обозначить за неизвестную, чтобы решить задачу?

b) Решите, составив систему уравнений. **c)** Проверьте ответ.

2. Составьте систему линейных уравнений с двумя перемеными по данным рисунка 8.

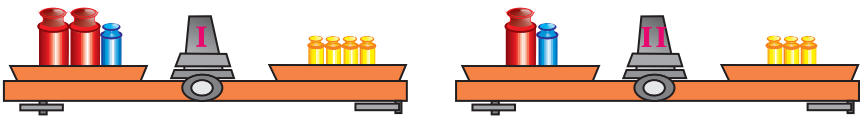


РИСУНОК 8

3. Решите систему графическим способом: $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

4. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax + 4y = b \end{cases}$

a) имеет бесконечное число корней;

b) имеет единственный корень; **c)** не имеет корней?

5. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} \dfrac{5x - 3 + 9y}{3} = \dfrac{2x + 3y - 2}{2} \\ \dfrac{x - 3y}{2} = \dfrac{2x - 3y}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x + 3 - 5y}{2} = \dfrac{3x - 4y + 3}{3} \\ \dfrac{6 + 3x - y}{3} = \dfrac{12x - y}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{6} + \dfrac{2x + y}{9} = 3 \\ \dfrac{x + y}{3} - \dfrac{x - y}{4} = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{8} + \dfrac{x - y}{6} = 5 \\ \dfrac{x + y}{4} + \dfrac{x - y}{5} = 10 \end{cases}$

6. В здании общее число однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных квартир 160. Число однокомнатных квартир в 2 раза меньше числа двухкомнатных и на 24 меньше числа трехкомнатных. Сколько квартир каждого вида в здании?

7. Задача-сказка: Верблюд и конь навьючены мешками одинаковой массы в разном количестве. Конь пожаловался на тяжесть груза. Но верблюд возразил: «Почему ты жалуешься? Если навьючить на меня один из твоих мешков, то мой груз будет тяжелее твоего в 2 раза. Если я тебе отдам один из своих мешков, тогда наш груз будет одинаков». Определите, сколько мешков несло каждое животное.

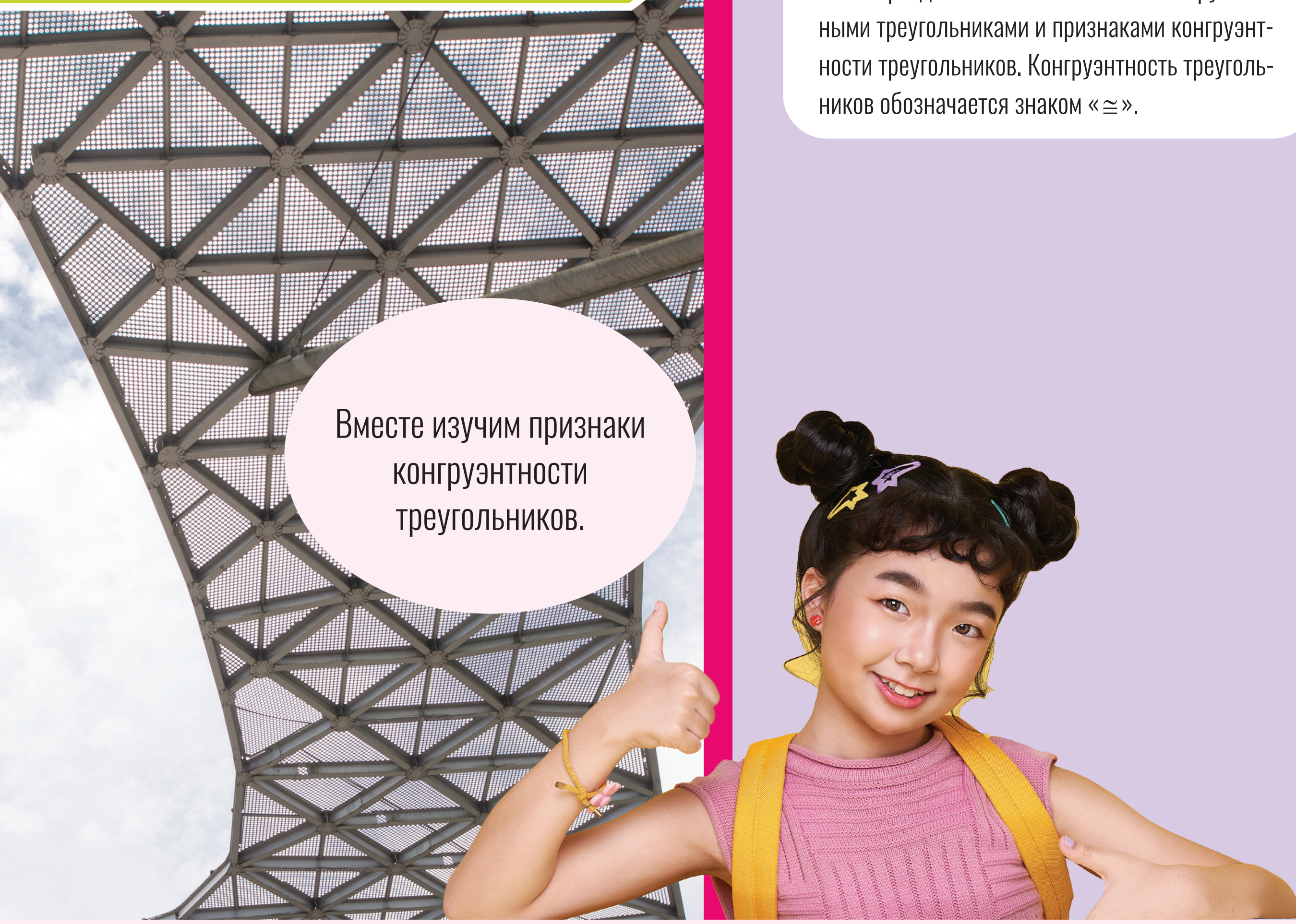
КОНГРУЭНТНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

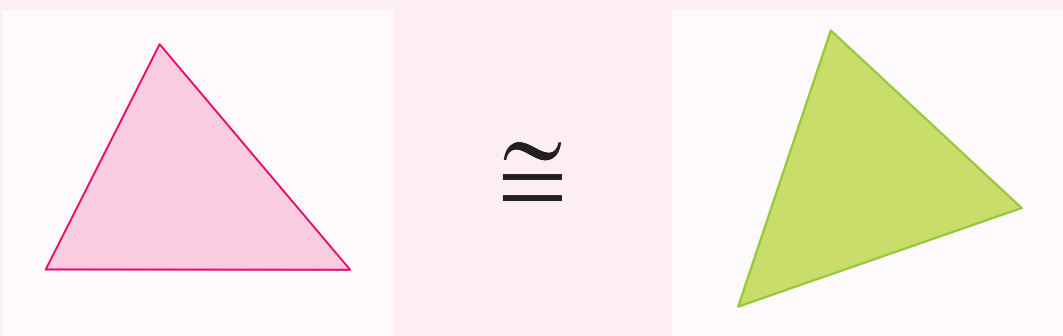
РАЗДЕЛ 9

Если переместить одну фигуру и при этом фигуры совпадут, то такие фигуры называются конгруэнтными или равными.

Конгруэнтные фигуры обладают одинаковыми формами и размерами. В геометрии вместо «равные фигуры» часто используется выражение «Конгруэнтная фигура».

В этом разделе вы ознакомитесь с конгруэнтными треугольниками и признаками конгруэнтности треугольников. Конгруэнтность треугольников обозначается знаком «$\cong$».





РАЗДЕЛ 9

1 Конгруэнтные треугольники

Вам известно кое-что о конгруэнтных фигурах. Например, отрезки равной длины, углы равной меры, треугольники с одинаковыми сторонами, квадраты с одинаковыми сторонами, круги с равными радиусами и др. конгруэнтны.

Согните лист бумаги пополам, нарисуйте на одной половине листа треугольник и вырежьте его ножницами (рисунок 1). Что вы можете сказать о полученных треугольниках?

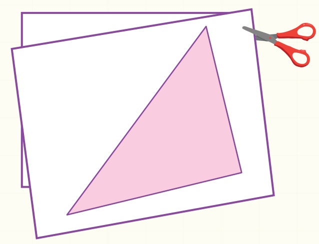


РИСУНОК 1

Если при наложении одного треугольника на другой все соответствующие точки двух треугольников совпадут, то эти треугольники будут называться **конгруэнтными.** Треугольники конгруэнтны, если конгруэнтны их соответствующие углы и соответствующие стороны.

Конгруэнтность фигур обозначается знаком "$\cong$": $\mathbf{\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1}$ (рисунок 2)
Если выполнятся условия

$$AB \cong A_1B_1; \quad AC \cong A_1C_1; \quad BC \cong B_1C_1,$$
$$\angle A \cong \angle A_1; \quad \angle B \cong \angle B_1; \quad \angle C \cong \angle C_1$$

то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны.

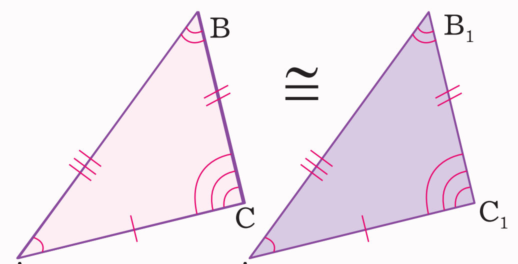


РИСУНОК 2

ВНИМАНИЕ: В конгруэнтных треугольниках напротив конгруэнтных сторон распологаются конгруэнтные углы и напротив конгруэнтных углов – конгруэнтные стороны.

В конгруэнтных треугольниках следует соблюдать порядок конгруэнтных углов.

Пусть $\Delta ABC \cong \Delta MNK$ (рисунок 3), тогда,

верно	неверно
$AB \cong MN$; $BC \cong NK$; $AC \cong MK$, $\angle A \cong \angle M$; $\angle B \cong \angle N$; $\angle C \cong \angle K$.	$AB \cong NK$; $BC \cong MK$; $AC \cong MN$, $\angle A \cong \angle N$; $\angle B \cong \angle K$; $\angle C \cong \angle M$.

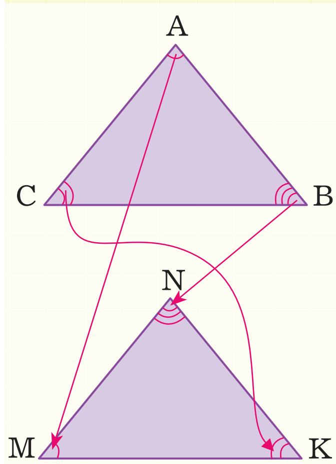


РИСУНОК 3

УПРАЖНЕНИЯ

1. Впишите вместо знака «?» треугольник, конгруэнтный данному (рисунок 4, a, b, c, d). Обоснуйте выбранный вами порядок букв.

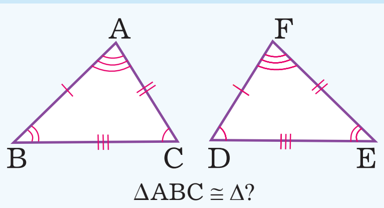


РИСУНОК 4, a

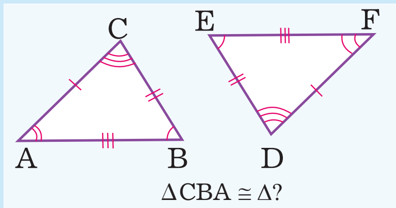


РИСУНОК 4, b

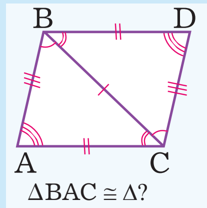


РИСУНОК 4, c

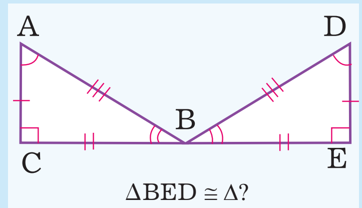


РИСУНОК 4, d

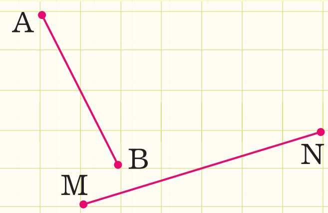


РИСУНОК 5

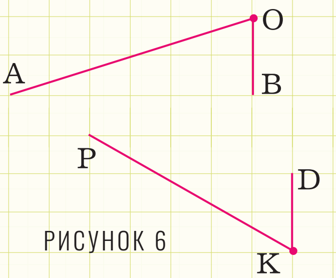


РИСУНОК 6

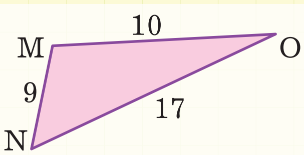


РИСУНОК 7

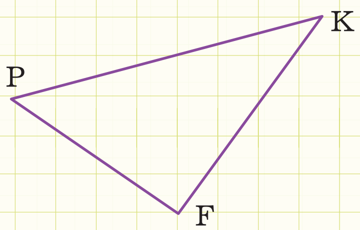


РИСУНОК 8

2. Конгруэнтны ли отрезки AB и MN на рисунке 5? Объясните ваш ответ.

3. Конгруэнтны ли углы AOB и PKD на рисунке 6? Объясните ваш ответ.

4. Треугольник ABC конгруэнтен треугольнику MON, изображённому на рисунке 7. Определите длину сторон треугольника ABC. Назовите конгруэнтные углы этих треугольников.

5. В тетради в клетку начертите треугольник MND, конгруэнтный треугольнику PKF, изображённому на рисунке 8.

6. В тетради в клетку начертите произвольный четырёхугольник ABCD и конгруэнтный ему четырёхугольник MNPK. Начертите отрезки AC и MP и напишите название полученных конгруэнтных треугольников.

7. Начертите биссектрису OC угла AOB. Определите, какие из нижеприведённых углов являются конгруэнтными:
a) $\angle AOC$ və $\angle BOC$; b) $\angle AOC$ və $\angle AOB$; c) $\angle AOB$ və $\angle COB$.
Обоснуйте свой ответ.

8. Могут ли нижеприведённые треугольники быть конгруэнтными?
a) остроугольный и тупоугольный треугольники;
b) прямоугольный и тупоугольный треугольники;
c) равнобедренный и равносторонний треугольники.
Обоснуйте свой ответ.

РАЗДЕЛ 9

2 Первый признак конгруэнтности треугольников

Чтобы проверить конгруэнтность треугольников нет необходимости, накладывая друг на друга, проверять их совпадение или же выяснить попарную конгруэнтность 6-ти основных элементов (3 стороны и 3 угла) треугольников. Достаточно проверить взаимную конгруэнтность нескольких основных элементов треугольников. Все это отражено в признаках конгруэнтности треугольников.

Признак конгруэнтности треугольников по двум сторонам и углу между ними.

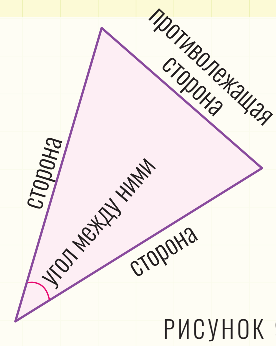


РИСУНОК 9

Если две стороны и угол между ними одного треугольника конгруэнтны соответствующим двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Первый признак также называют признаком СУС (сторона, угол, сторона).

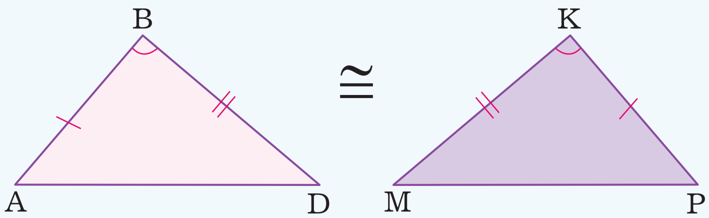


РИСУНОК 10

Если $AB \cong PK$, $BD \cong KM$ и $\angle B \cong \angle K$, то $\Delta ABD \cong \Delta PKM$ (рисунок 10)

ЗАМЕЧАНИЕ: Прямоугольные треугольники, соответствующие катеты которых конгруэнтны, сами тоже конгруэнтны.

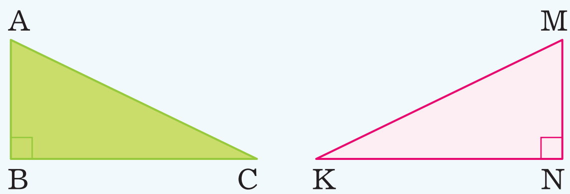


РИСУНОК 11

$AB \cong MN$, $BC \cong NK$ если, то $\Delta ABC \cong \Delta MNK$ (рисунок 11)

ПРИМЕР: На сторонах угла MOH отложены отрезки OA и OB. Точка C, лежащая на биссектрисе OD угла $\angle AOB$ соединена отрезками с точками A и B (рисунок 12). Покажите что $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим ΔAOC и ΔBOC на рисунке 12. По условию $OA \cong OB$, сторона OC общая для обоих треугольников $\angle AOC \cong \angle BOC$ (OC-биссектриса). Тогда по первому признаку конгруэнтности треугольников $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.

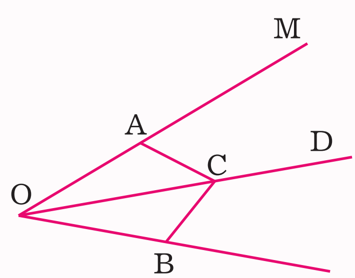


РИСУНОК 12

УПРАЖНЕНИЯ

1. Можно ли считать треугольники на рисунках 13 конгруэнтными? Приведите признак СУС и обоснуйте свой ответ.

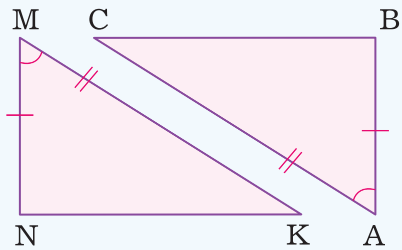


РИСУНОК 13, а

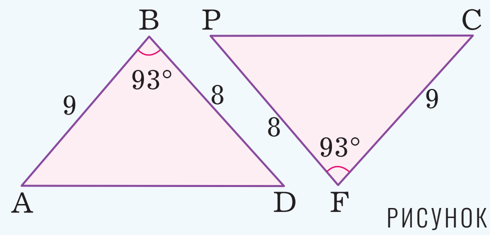


РИСУНОК 13, b

Как строится треугольник по двум сторонам и углу между ними?

2. Практическая работа: Вспомните алгоритм построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

1. $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60°$ Постройте ΔABC.
2. $A_1B_1 = 4$ см, $A_1C_1 = 5$ см, $\angle A_1 = 60°$ Постройте $\Delta A_1B_1C_1$.
3. Перемещая треугольник ABC наложите его на треугольник $A_1B_1C_1$. Какая из сторон треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает со стороной BC?
4. Что вы можете сказать о треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$?

3. Известно, что $\Delta ABC \cong \Delta KLM \cong \Delta DEF$. Определив, длину соответственных сторон и градусную меру углов заполните таблицу:

ΔABC	$AB = 6$ см; $BC = 12$ см; $\angle B = 105°$		
ΔKLM		$ML = 7{,}5$ мм; $KM = 5{,}4$ мм; $\angle M = 53°$	
ΔDEF			$DE = 1{,}5$ дм; $EF = 1{,}8$ дм; $\angle E = 25{,}6°$

4. Продолжите от точки A стороны AB и AC треугольника ABC в противоположную им сторону на длины равные длинам этих отрезков. Концы полученных отрезков обозначьте D и E. Можно ли утверждать, что образовавшиеся треугольники ABC и AED конгруэнтны? Ответ обоснуйте.

5. Основываясь на данные рисунка 14, можно ли сказать, что $\Delta ABC \cong \Delta KLM$? Если нет, то как следует изменить порядок вершин треугольника KLM, чтобы можно было говорить о конгруэнтности этих треугольников?

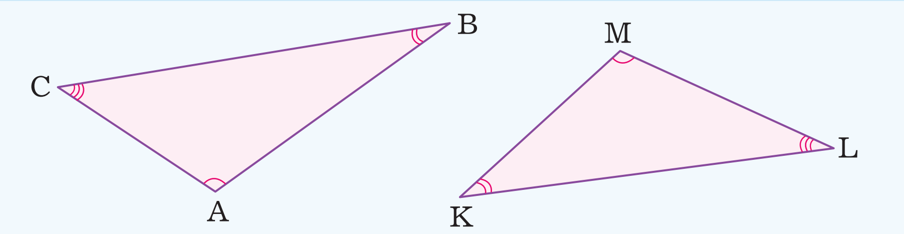


РИСУНОК 14

6. ΔABC – равнобедренный: $AB \cong AC$. Биссектриса, проведённая из точки A, пересекает сторону BC в точке D. Можно ли считать треугольники ABD и ACD конгруэнтными? Обоснуйте свой ответ.

7. На рисунке 15 EC = 19,5 м, CD = 1800 см, ED = 0,027 км, AC = 18000 мм, BC = 1950 см, чему равна ширина AB озера?

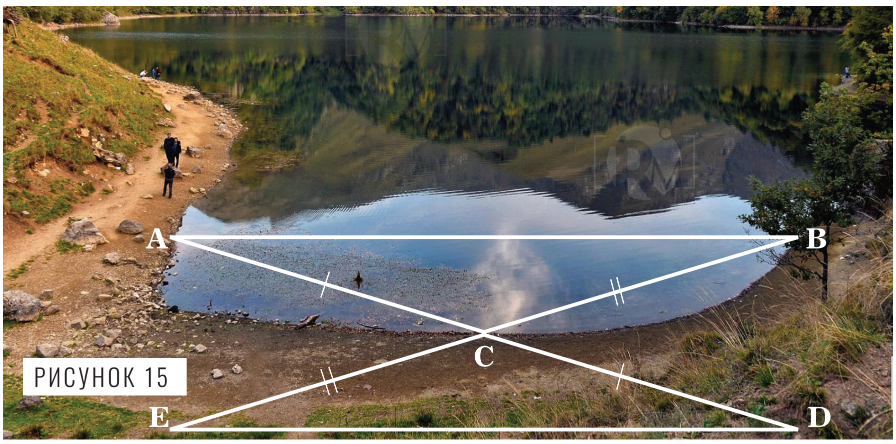


РИСУНОК 15

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ На гранях куба укажите конгруэнтные треугольники. Обоснуйте, на основе какого признака эти треугольники являются конгруэнтными (рис. 16).

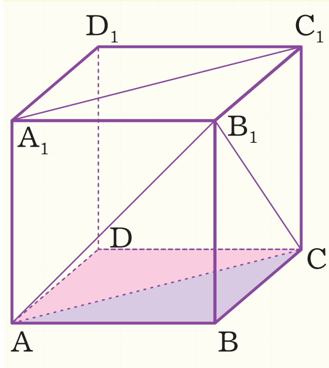


РИСУНОК 16

9. Практическая работа: Вырежьте из листа бумаги какой-нибудь треугольник ABC и поверните его вокруг точки A на 90° по часовой стрелке. Что вы можете сказать о полученном треугольнике и о треугольнике ABC?

10. Начертите диаметры AB и CD окружности с центром в точке O. что вы можете сказать о треугольниках AOC и BOD. Каковы будут длины хорд BD и AC в миллиметрах, если сумма их длин равна 24,6см?

РАЗДЕЛ 9

3 Второй признак конгруэнтности треугольников

Признак конгруэнтности треугольников по стороне и прилежащим к ней двум углам:

Bir üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik iki bucağı uyğun olaraq digər üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik iki bucağına konqruyentdirsə, bu üçbucaqlar konqruyentdir.

Второй признак называют **УСУ** (угол, сторона, угол)

Если, $AB \cong PK$, $\angle A \cong \angle P$ и $\angle B \cong \angle K$ то $\Delta ABD \cong \Delta PKM$ (рисунок 17)

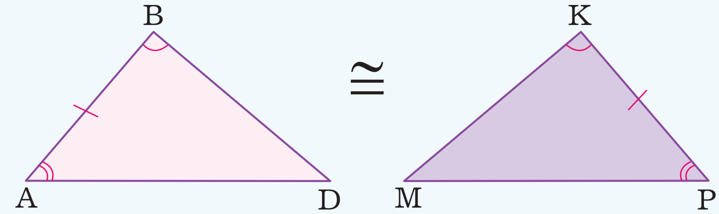
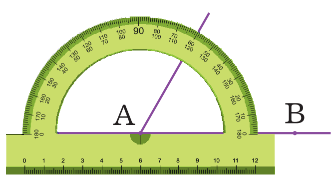
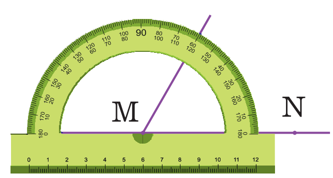
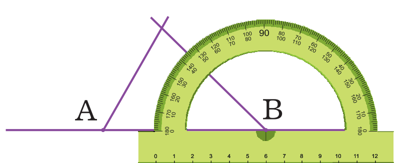
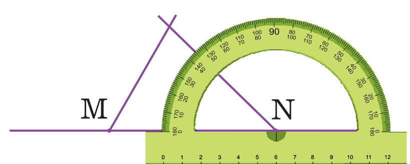


РИСУНОК 17

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА: Постройте треугольники по алгоритму в таблице.

Построение ΔABC	Построение ΔMNK
На прямой a начертите отрезок AB длиной 2 *см*. 	На прямой a начертите отрезок MN длиной 2 *см*. 
Постройте угол в 60° с вершиной в точке A и стороной AB 	постройте угол в 60° с вершиной в точке M и стороной MN 
Постройте угол в 45° с вершиной в точке B в той же полуплоскости, что и угол A. 	Постройте угол в 45° с вершиной в точке N в той же полуплоскости, что и угол M. 

Вспомните: Как строится треугольник по двум сторонам и углу между ними?

Обозначьте буквой C точку пересечения сторон углов A и B.	обозначьте буквой K точку пересечение сторон углов M и N.

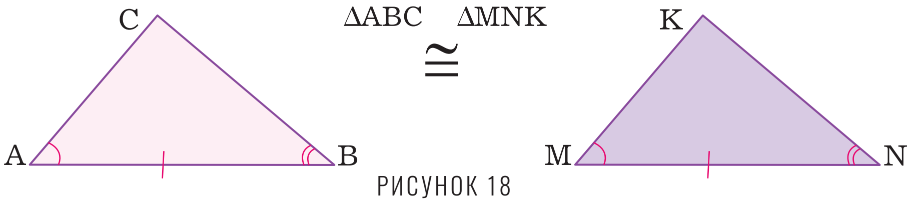


РИСУНОК 18

Что вы можете сказать о треугольниках ABC и MNK?

УПРАЖНЕНИЕ

1. Укажите для треугольника на рисунке 19
  a) углы, прилежащие к каждой стороне;
  b) углы, противолежащие каждой стороне;
  c) стороны, противолежащие к каждому углу.
  Напротив какого угла лежит большая сторона (см. рисунок 19)? Напротив какой стороны лежит меньший угол?

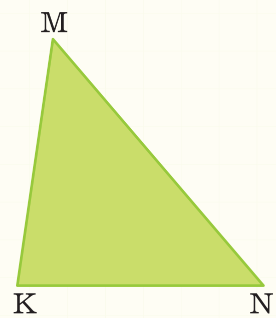


РИСУНОК 19

2. В треугольниках ABC и DPM, $AB \cong DP$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle P$. Найдите.
  a) AB, если $DP = 3{,}5$ см,   b) $\angle D$, если $\angle A = 72°$,
  c) $\angle B$, если $\angle P = 17°49'$,   d) PM, если $CB = 92$ мм.

3. Дополните таблицу, если известно $\Delta ABC \cong \Delta DEF \cong \Delta PMN$.

ΔABC	$AB = 12$ см, $\angle A = 53°$, $\angle B = 25°$		
ΔDEF		$DE = 4{,}4$ мм, $\angle E = 90°$, $\angle D = 47°12'$,	
ΔPMN			$MN = 4{,}4$ мм, $\angle M = 111°22'$, $\angle N = 46°31'$

Определите третий угол этих треугольников.

4. $AO \cong OC$, $\angle OCB \cong \angle OAD$ (рисунок 20). Докажите, что, $\Delta COB \cong \Delta AOD$.

5. На рисунке 20 $AO \cong OC$, $\angle OCD \cong \angle OAB$.
  a) $AB = ?$ при $CD = 10$ см,   b) $BD = ?$ при $OD = 2{,}7$ см

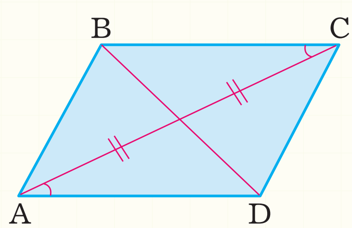


РИСУНОК 20

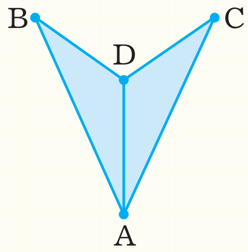


РИСУНОК 21

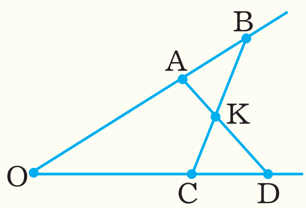


РИСУНОК 22

6. Луг AD биссектриса $\angle CAB$ (рисунок 21). $\angle ADB \cong \angle ADC$. Докажите: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$.

7. Точки B и C лежат на сторонах угла A, точка D лежит на биссектрисе (рисунок 21). $\angle ADB \cong \angle ADC$. Докажите, что $\Delta ADB \cong \Delta ADC$.

8. **Отрезки** AB и CD равной длины пересекаются в точке O. $AO \cong OC$. Докажите:

a) $\Delta BOC \cong \Delta DOA$;

b) $\angle ABC \cong \angle ADC$.

9. На рисунке 22 $OA \cong OC$ и $OB \cong OD$. Докажите:

a) $AD \cong BC$;

b) $\angle BCD \cong \angle DAB$;

c) $\Delta BCD \cong \Delta DAB$.

10. На сторонах произвольного угла, начиная от вершины угла, были проведены два отрезка равной длины. От конечных точек этих отрезков к противоположной стороне угла были проведены перпендикуляры. Можно ли считать, что эти перпендикуляры конгруэнтны? (Рассмотрите острые, прямые и тупые углы.)

11. Перпендикуляр к биссектрисе угла A пересекает его стороны в точках B и C. Можно ли утверждать, что ΔABC равна бедренный?

12. Медиана, проведенная из вершины ABC, пересекает сторону AC в точке D. Точка E лежит на продолжении в противоположную сторону от точки медианы BD так, что $DE \cong BD$. $\angle BAD = 48°$ и $\angle BCD = 50°$. Найдите $\angle BAE$.

13. BD – высота треугольника ABC. $\angle ABD \cong \angle CBD$. Произвольно выбранная на высоте BD точка M соединена отрезками с точками A и C. Докажите, что $AM \cong MC$.

14. Докажите, что медианы, проведенные к конгруэнтным сторонам в конгруэнтных треугольниках, конгруэнтны.

РАЗДЕЛ 9

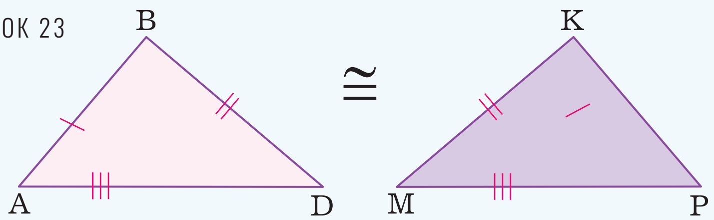
4 Третий признак конгруэнтности треугольников

Признак конгруэнтности треугольников по трем сторонам:

Если три стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Третий признак называется признак ССС (сторона, сторона, сторона)

РИСУНОК 23



Если
$AB \cong PK$, $AD \cong PM$
и $BD \cong KM$, то
$\Delta ABD \cong \Delta PKM$
(рисунок 23)

ПРИМЕР: Конгруэнтные отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рисунок 24) и $DO \cong OB$.

Докажите, что $\Delta ADC \cong \Delta CBA$.

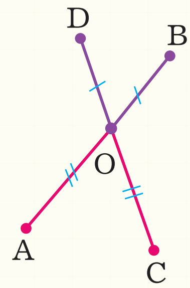


РИСУНОК 24

РЕШЕНИЕ: Дорисуем отрезки AD, AC и BC. Так, как показано на рисунке 25, и рассмотрим треугольники AOD и COB. Здесь $DO \cong OB$ и $AO \cong OC$ (почему?). $\angle AOD$ и $\angle COB$ как вертикальные углы. $\angle AOD \cong \angle COB$ как вертикальные углы. Тогда по второму признаку конгруэнтности треугольников $\Delta AOD \cong \Delta COB$. Отсюда $AD \cong BC$ (почему?).

Таким образом, $AB \cong CD$, $AD \cong BC$, сторона AC – общая, то есть три стороны треугольника ADC соответственно конгруэнтны трем сторонам треугольника CBA. Отсюда $\Delta ADC \cong \Delta CBA$.

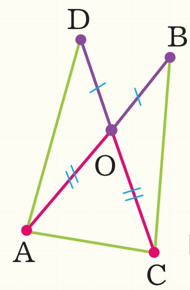


РИСУНОК 25

УПРАЖНЕНИЯ

1. На рисунке 26 указаны длины сторон треугольников ABC и MOK. Конгруэнтны ли они? Почему?

2. В треугольнике ABC: $AB = 11$ см, $BC = 8$ см, $AC = 9$ см. В треугольнике MNK: $MN = 9$ см, $NK = 11$ см, $MK = 8$ см. Покажите конгруэнтные стороны и углы этих треугольников.

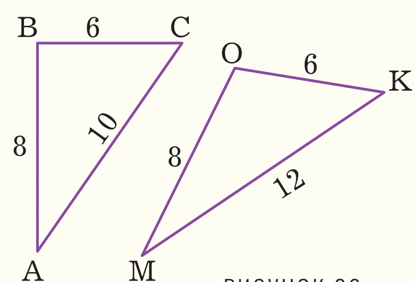


РИСУНОК 26

3. Назовите конгруэнтные треугольники среди данны на рисунке 27, 28.

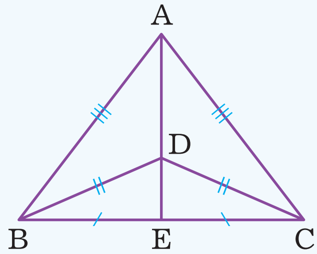


РИСУНОК 27

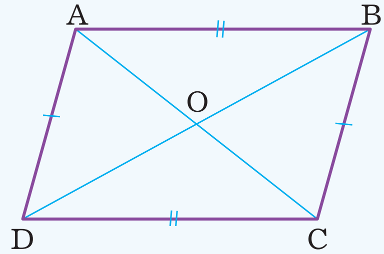


РИСУНОК 28

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, являющейся серединой отрезка AB. Докажите, что $\Delta AOC \cong \Delta BOD$, если $\angle CBO \cong \angle DAO$ (рисунок 29).

5. На рисунке 30 $AB \parallel CD$, $BE \cong CE$. Найдите x и y.

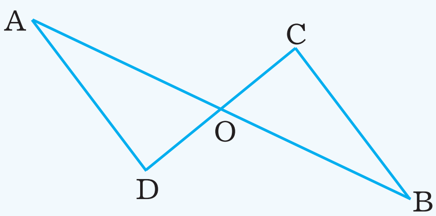


РИСУНОК 29

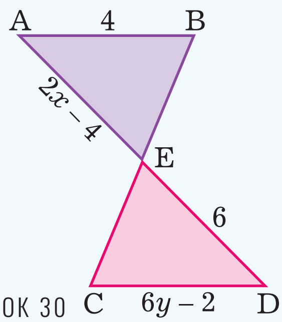


РИСУНОК 30

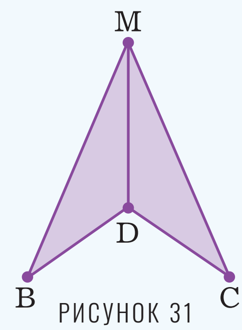


РИСУНОК 31

6. На рисунке 31 $BM \cong CM$, $BD \cong CD$. Докажите, что

a) $\Delta BDM \cong \Delta CDM$;

b) Луч MD является биссектрисой угла BMC.

7. На рисунке 32 $BN \cong CM$ и $BM \cong CN$. Можно ли утверждать, что $AB \cong AC$? Ответ обоснуйте.

8. Равнобедренные треугольники ABD и BDC имеют общее основание BD. Отрезок AC пересекает BD в точке O. Докажите, что $\angle ABC \cong \angle ADC$ (рисунок 33).

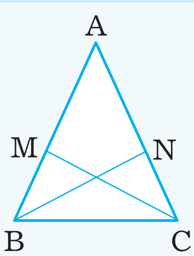


РИСУНОК 32

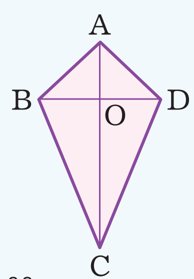


РИСУНОК 33

9. На рисунке 34: $MK \cong NP$ и $KN \cong MP$. Определите $\angle KMP$, если $\angle KNP = 67°$.

10. На рисунке 35 отрезки AM и CP – биссектрисы. $AD \cong BC$ и $AB \cong CD$. Найдите градусную меру $\angle BDC$ и длину DM, если $\angle ABD = 25°$ и BP = 3 см.

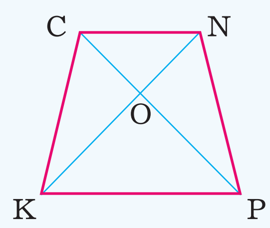


РИСУНОК 34

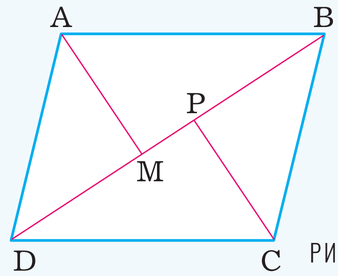


РИСУНОК 35

11. Практическая работа: Наложите друг на друга один из концов двух деревянных реек и прикрепите эти концы гвоздем на неподвижной доске (рисунок 36). Поворачивая другие концы этих реек, получите разные положения:

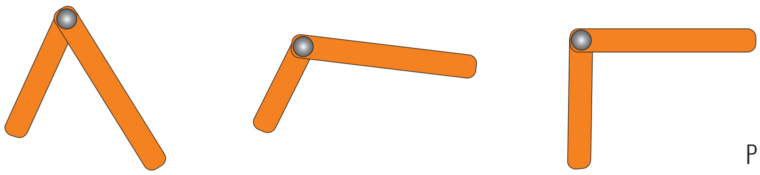


РИСУНОК 36

Объясните, с какой целью мы поворачивали концы реек. Как сделать, чтобы рейки оставались неподвижными? (рисунок 37)

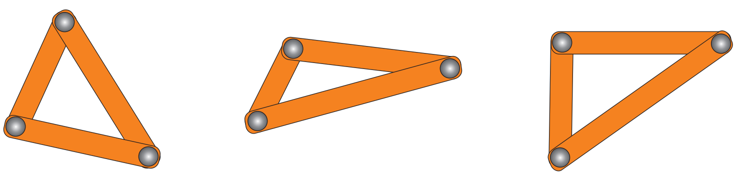


РИСУНОК 37

Что понимается под устойчивостью треугольников?
Как это используется в быту?

12. Если углы, противолежащие стороны и высоты, проведенные к другой стороне в двух треугольниках соответственно конгруэнтны, то сможете ли вы обосновать конгруэнтность этих треугольников (рисунок 38).

13. Обоснуйте конгруэнтность двух треугольников, если две стороны и медиана, расположенная между ними, в одном треугольнике конгруэнтны соответственно двум сторонам и медиане, расположенной между этими сторонами, в другом треугольнике.

Проверьте себя

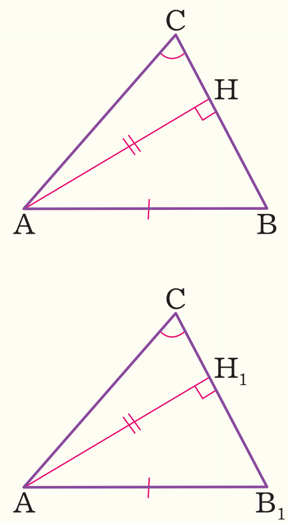


РИСУНОК 38

РАЗДЕЛ 9

5 Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников

Равнобедренный треугольник – это треугольник у которого две стороны конгруэнтны.

Две конгруэнтные стороны равнобедренного треугольника – это боковые стороны, а третья сторона – основание (рисунок 39). Если две стороны остроугольного, прямоугольного или же тупоугольного треугольника будут конгруэнтны, то этот треугольник будет равнобедренным. На рисунке 39 показаны все эти случаи, а также их углы и стороны.

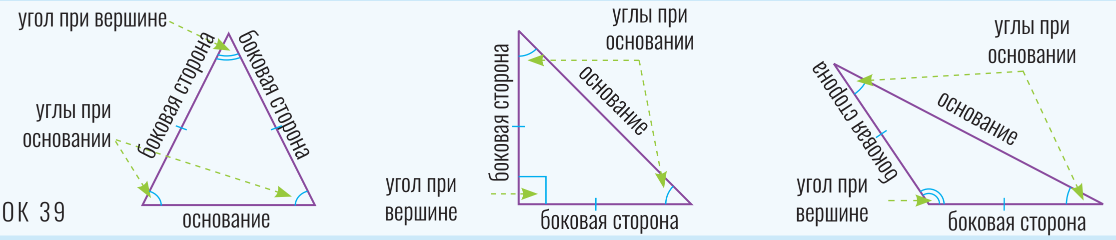


РИСУНОК 39

СВОЙСТВО 1: *Свойство углов при основании в равнобедренном треугольнике.* **Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.**

На рисунке 40 в треугольнике ABC $\angle A \cong \angle C$ в силу того, что $AB \cong CB$

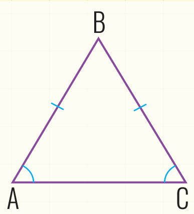


РИСУНОК 40

СВОЙСТВО 2: *Свойство медианы, биссектрисы и высоты, опущенных на основание, в равнобедренном треугольнике.* **В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, опущенные на основание, совпадают.**

В ΔABC (рисунок 41) $AB \cong CB$, $AD \cong CD$ тогда BD – медиана, $\angle ABD \cong \angle CBD$, BD – биссектриса, $BD \perp AC$, тогда BD – высота.

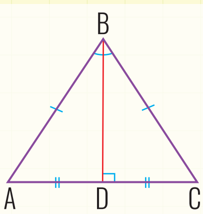


РИСУНОК 41

Равносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны конгруэнтны

СВОЙСТВО 3: *Свойство медиан, биссектрис и высот равностороннего треугольника* **Медиана, биссектриса и высота, проведённые из любой вершины равностороннего треугольника, совпадают.**

ΔABC равносторонний (рисунок 42): $AB \cong AC \cong BC$.
AN биссектриса: $\angle BAN \cong \angle CAN$,
AN медиана: $BN \cong CN$, AN высота: $AN \perp BC$.

Eyni hökmləri BK və CN parçaları üçün yazın.

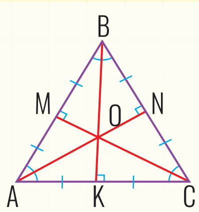


РИСУНОК 42

ПРИМЕР: ΔABC равнобедренный: $AB \cong BC$. D – середина основания. $\angle ABD = 43°$ Найти углы A и C.

РЕШЕНИЕ: По условия ясно, что AB и BC – боковые стороны, AC основание. Так как D середина основания AC, то BD – медиана. По свойству 2 BD также и биссектриса, тогда $\angle B = 2 \cdot \angle ABD = 2 \cdot 43° = 86°$. В силу свойства суммы углов треугольника и свойства 1:

$\angle A \cong \angle C = (180° - \angle B) : 2 = (180° - 86°) : 2 = 47°$. **Ответ:** $47°$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите конгруэнтные углы и конгруэнтные стороны равнобедренного треугольника MNK (рисунок 43).

2. Из вершины M равнобедренного треугольника проведена биссектриса (рисунок 43). Покажите полученные в этом случае конгруэнтные отрезки и конгруэнтные углы.

3. В равнобедренном треугольнике ABC к основанию AB проведена биссектриса CK, точка K лежит на стороне AB.

a) Найдите AK и BK, если AB равно **1)** 12 sm; **2)** 25 mm; **3)** $14{,}4$ sm;

b) Найдите AB если длина BK равна: **1)** $3{,}4$ см; **2)** 5 мм; **3)** $4{,}45$ см

4. Определите условие и утверждение в свойстве углов при основании в равнобедренном треугольнике. Поменяйте условие и утверждение местами и сформулируйте. Верны ли полученные свойства?

5. Постройте биссектрису MC в треугольнике MNK. Известно, что $\angle N \cong \angle K$ Обоснуйте, что $MN \cong MK$.

6. Найдите углы при основании в равнобедренном треугольнике, если угол при вершине равен: a) $30°$; b) $120°$; c) $90°$; d) $60°$

7. a) Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть равным **1)** $89°$; **2)** $120°$; **3)** $90°$ Ответ обоснуйте.

b) Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если один из углов при основании равен **1)** $60°$; **2)** $28°$; **3)** $79°$.

8. Самир утверждает, что каждый острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника равен $45°$. Прав ли он?

9. Медиана, проведённая из вершины A равностороннего треугольника ABD равна $11{,}4$ см. Чему равна высота, проведённая из вершины C?

10. Найдите углы треугольников по данным на рисунке 44, a, b, c.

11. В равнобедренном треугольнике ABD $AB \cong DB$, длина боковой стороны равна 13 см, BC – биссектриса и $AC=4{,}2$ см. Найти периметр треугольника ABD.

12. В треугольнике ABC $AB \cong AC$, периметр равен 54 см, AK – медиана. Периметр треугольника ABK равен 42 см. Найти длину AK.

13. Медиана равнобедренного треугольника делит его периметр на части 33 см и 42 см. Найти стороны треугольника.

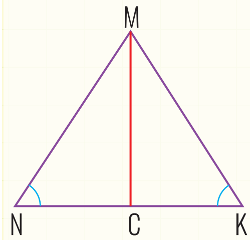


РИСУНОК 43

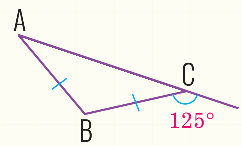


РИСУНОК 44, a

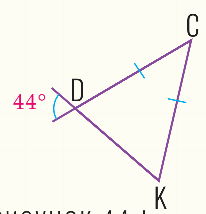


РИСУНОК 44, b

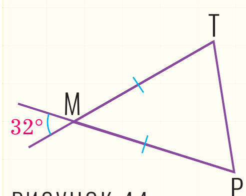


РИСУНОК 44, c

Обобщающие задания

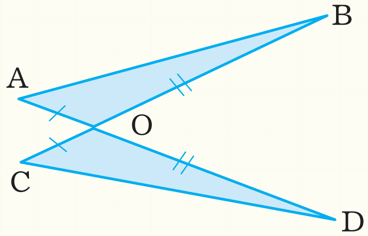


РИСУНОК 45

1. Şəkil 39-da verilənlərə görə $\Delta AOB \cong \Delta COD$ olduğunu göstərin.

2. Şəkil 40-da verilənlərə görə $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ olduğunu göstərin

3. O nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsi olduğu məlumdursa, $\angle ACO \cong \angle BDO$ olduğunu isbat edin (şəkil 41).

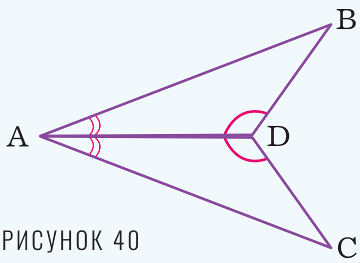


РИСУНОК 40

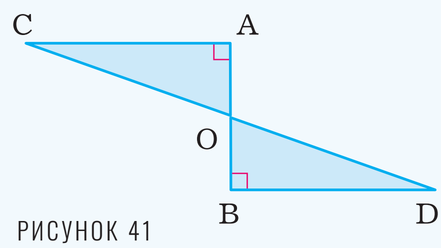


РИСУНОК 41

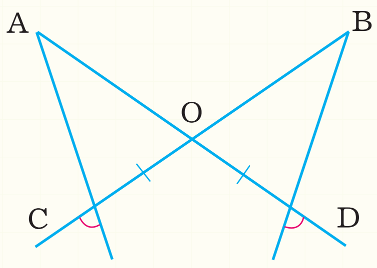


РИСУНОК 42

4. Şəkil 42-də verilənlərə görə $AO \cong BO$ olduğunu isbat edin.

5. İki üçbucağın bir tərəfi və digər tərəfə çəkilmiş median və hündürlüyü konqruyent olarsa (şəkil 43), bu üçbucaqların konqruyent olduğunu əsaslandırın.

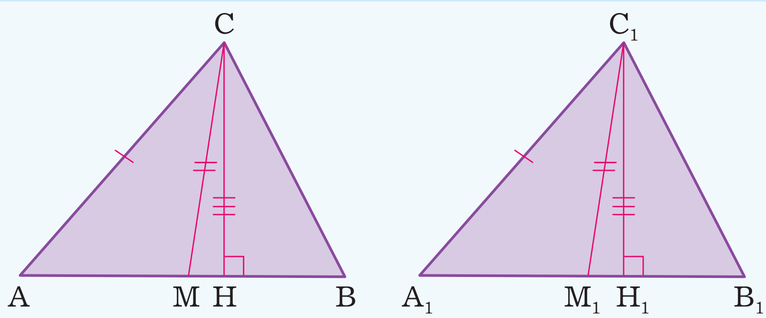
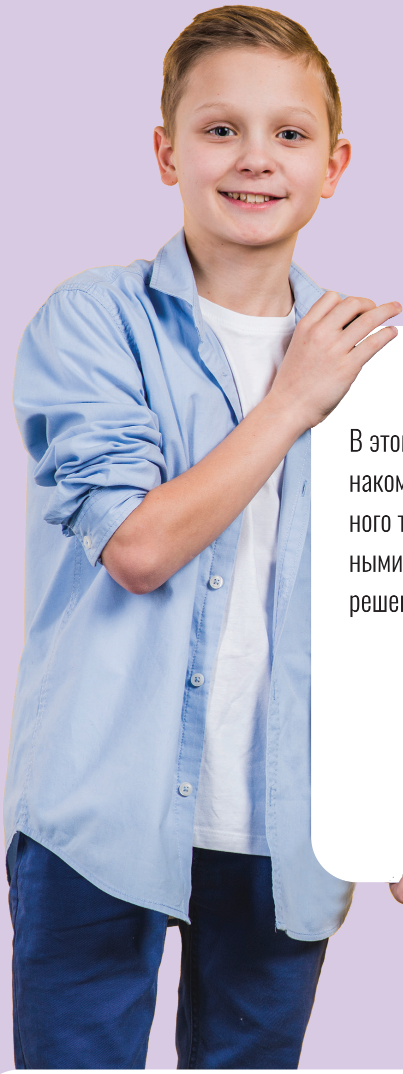


РИСУНОК 43

Проверьте себя

СИТУАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

РАЗДЕЛ 10



В этом разделе вы ознакомитесь с различного типа ситуационными задачами и их решениями.

Иногда бывает трудно определить точные размеры измеряемых объектов и тогда это делается приближенной. В этом разделе вы ознакомитесь с понятиями абсолютяяяной и относительной погрешности приближенной величины.

В жизни очень часто приходится иметь дело с задачами, связанными с банками, счетами, процентами. Знаете ли вы, какими формулами пользуются в банке при расчете процентов по кредитам? Надеемся, что полученные вами знания по решению такого рода задач помогут вам в будущем.

1 Задачи на погрешность

При решении ситуационных задач приходится иметь дело с точными и приближенными значениями физических величин. Например, при округлении величины 6,39 см до десятых получится 6,4 см: $6{,}39 \approx 6{,}4$. При таком округлении допускается определенная погрешность точного значения числа. Приближенное число увеличилось на $6{,}4 - 6{,}39 = 0{,}01$.

При измерении величин (температуры, давления, скорости и т.д.) полученное значение по разным причинам несколько отличается от точного значения измеряемой величины.

КЛАСС ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ИНСТРУМЕНТА

При проведении наблюдений или опытов для решения некоторых задач приходится применять измерительные инструменты (линейка, транспортир, термометр, весы, манометр и т.д.). На этих инструментах можно увидеть шкалу со штрихами. Измерения не всегда дают точный результат. Точность измерений зависит от числа делений (штрихов) на измерительной шкале.

Определим точность измерений, зависящую от отношения разности двух соседних чисел на шкале к числу делений между этими числами, на нижеследующих измерительных инструментах:

На портняжной ленте между двумя соседними числами всего одна деление (рисунок 1). Точность ленты равна $\frac{10-9}{1} = 1$ см.

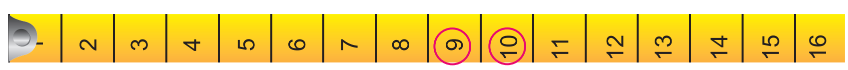


РИСУНОК 1

На линейке между числами 10 и 9 расположено 10 делений. Тогда точность равна: $\frac{10-9}{10} = 0{,}1$ см (рисунок 2).

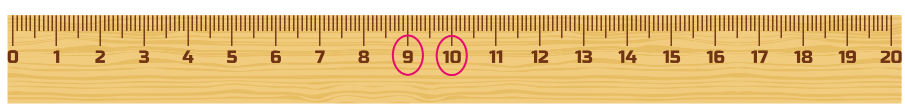


РИСУНОК 2

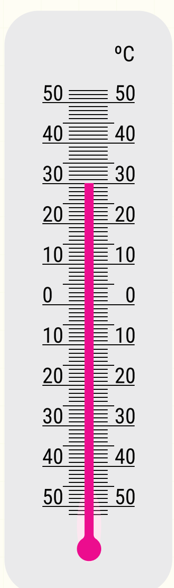


РИСУНОК 3

На шкале термометра между двумя соседними показаниями 10 делений (рисунок 3). Тогда точность термометра равна: $\frac{30°-20°}{10} = 1°$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА: Измеряя линейной длину карандаша (рисунок 4), к полученному значению приписывают значение точности со знаком «±»: $13{,}2$ см $\pm$ $0{,}1$ см. Измерьте и запишите длину вашей ручки.

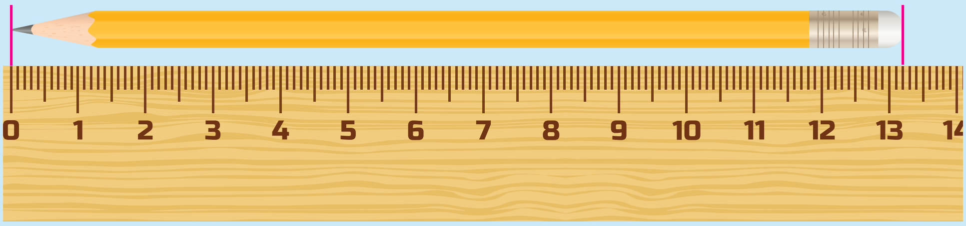


РИСУНОК 4

При измерении величины a обычно определяютя ее разные приближенного значения. И у каждого приближенного значения своя погрешность.

Модуль разности точного значения a и приближенного значения называется **абсолютной погрешностью** приближенного значения x, $|a - x|$.

Определить точное значение величины путем измерений невозможно. Абсолютная погрешность показывает насколько измеренное приближенное значение отличается от точного значения величины.

Если точное значение величины равна a, приближенная значение – x, допущенная погрешность – b, то записывается: $a = x \pm b$.

Абсолютная погрешность:
|точное значение – приближенное значение|

ОБРАЗЕЦ: Чтобы определить массу коробки со сладостями из партии одинаковых коробок со сладостями выбрали несколько штук и взвесили. Полученные результаты: $350{,}2$ г, 350 г, 348 г, 352 г, $349{,}5$ г, 349 г. Далее вычислили среднее арифметическое наибольшего и наименьшего этих значений: $(352 - 348) : 2 = 350$ г.

За погрешность в приняли полуразность наибольшего и наименьшего измеренных значений:

$b = (352 - 348) : 2 = 2.$

Масса одной коробки принимается равной 350 ± 2 г.

ЗАДАЧА: На коробке чая написано: «масса равна 125 ± 1 г» Какими могут быть наименьшее и наибольшее значения массы коробки чая?

РЕШЕНИЕ: $125 + 1 = 126$ г и $125 - 1 = 124$ г Таким образом, наибольшее значение массы может быть 126 г, наименьшее 124 г.

Ответ: 126 г, 124 г.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Округлите число до указанного разряда (черточка под ним) и найдите абсолютную погрешность округления.

a) $2{,}3\underline{4}1$; b) $54\underline{3}{,}78$; c) $0{,}\underline{9}537$; d) $-36{,}\underline{7}921$.

2. Вычислите погрешности округления и дополните таблицу:

Число	Округленное значение	Модуль разности	Абсолютная погрешность
61,76318	61,7632	$\lvert 61{,}76318 - 61{,}7632 \rvert$	
61,76318	61,763		0,00018
61,76318	61,76		
61,76318	61,8		
61,76318	62		

3. На числовой оси

$6{,}5 \le a < 7{,}5$

a) при округлении любого числа между 6,5 и 7,5 приближенное значение принимается равным 7 (рисунок 5). Какова наибольшая погрешность этого округления?

$7 < a < 9$

b) при округлении любого числа между 7 и 9 приближенное значение было принято равным 8 (рисунок 6). Какова наибольшая погрешность такого приближения?

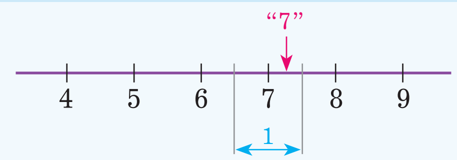


РИСУНОК 5

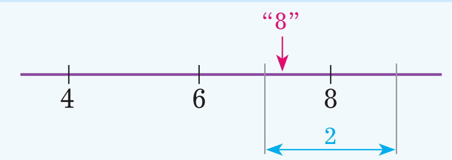


РИСУНОК 6

4. Измеренная с точностью до 0,1 метра длина забора оказалась равной 12,5 м. Между какими числами расположена истинная длина забора?

5. Длина и ширина прямоугольника с точностью до 1 см равны соответственно 8 и 6 см. Между какими числами расположены числа, соответствующие длине и ширине прямоугольника? Между какими числами расположено возможное значение площади прямоугольника?

6. Измерения прямоугольного параллелепипеда с точностью до 2 см равны 23 см, 24 см и 27 см. Между какими числами расположено число равное объему параллелепипеда?

7. Температура воздуха по показаниям термометра с ценой деления шкалы равной $0{,}2°C$ оказалась $18{,}6°C$. Как будет выглядеть это показание при цене деления шкалы равной $0{,}1°C$?

8. Али округлял число $25{,}925$ до сотых, до десятых и до целых и каждый раз вычислял абсолютную погрешность округления. В каком случае абсолютная погрешность наибольшая? Проверьте вычислениями.

9. Представьте дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной. Округлите до одной тысячных, сотых, десятых. В каждом случае найдите абсолютную погрешность округления.

10. При измерении длины стола допустимая абсолютная погрешность равна 1 см. При измерении расстояния между городами допустимая абсолютная погрешность равна 1 м $= 100$ см. Как по-вашему, какое измерение более точное? Почему? Обоснуйте ответ.

11. Практическая работа: Штангенциркуль (рисунок 7) – это инструмент с достаточно большой точностью измерений. Этим инструментом можно измерить линейные размеры деталей, глубину отверстий и трещин. С помощью штангенциркуля измерьте линейные размеры какого-нибудь предмета. На инструменте указан класс точности измерения. Запишите результат.

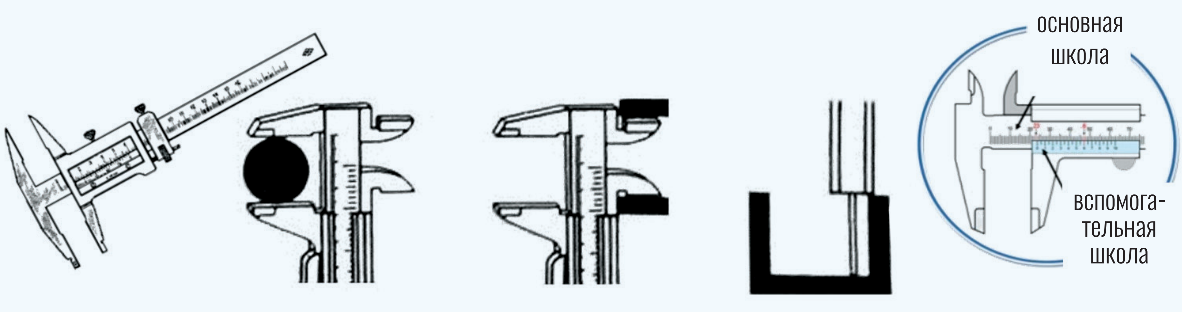


РИСУНОК 7

Проверьте себя

2 Относительная погрешность

Понятие относительной погрешности применяется для оценки допущенной погрешности измерений, округления или нахождения приближенного значения числа.

$$N = \frac{|a - x|}{|x|}$$

Относительная погрешность приближенного значения величины равна отношению абсолютной погрешности приближенного значения к модулю приближенного значения:

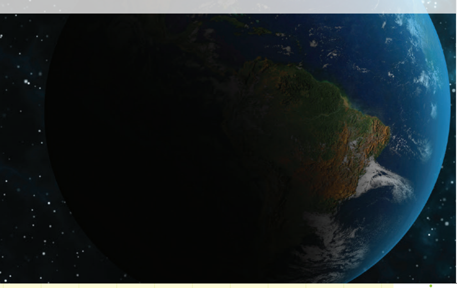
$$\text{Относительная погрешность} = \frac{\text{абсолютная погрешность}}{\text{модуль приближенного значения}}$$

$$N = \frac{|a - x|}{|x|} \cdot 100\%$$

Выражения относительной погрешности в процентах:

$$\text{Относительная погрешность} = \frac{\text{абсолютная погрешность}}{\text{модуль приближенного значения}} \cdot 100\%$$

Запомните: Измерение с меньшей относительной погрешностью считается более точным.



ЗАДАЧА: Приблизительно толщина человеческого волоса, измеренная с точностью $0{,}01$ мм, равна $0{,}15$ мм. Расстояние от Земли до Луны, измеренное с точностью до 500 км, приблизительно равно $384\ 000$ км. Какое из измерений более точное?

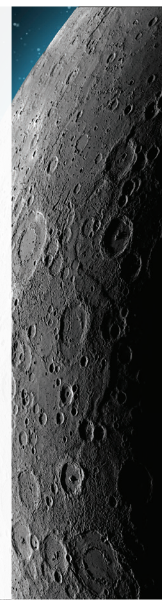
РЕШЕНИЕ: Найдем относительную погрешность приближенного значения толщины человеческого волоса в процентах:

$$\frac{0{,}01}{0{,}15} = \frac{1}{15} = 0{,}0666\ldots = 6{,}(6)\%.$$

Относительная погрешность в процентах приближенного значения расстояния между Землей и Луной равна:

$$\frac{500}{348000} = \frac{1}{768} \approx 0{,}00130208333\ldots = 0{,}130208(3)\%.$$

Ответ: $0{,}130208(3)\% < 6{,}(6)\%$ Значит, точность измерения расстояния между Землей и Луной выше.



УПРАЖНЕНИЯ

1. Округлите число $26{,}345$:

a) до единиц ; b) до одной сотых.

В каждом случае определите абсолютную и относительную погрешности. В каком случае относительная погрешность больше?

2. a) Какое из равенств верное при округлении числа $3{,}65$ до одной десятых: $3{,}65 \approx 3{,}6$ или $3{,}65 \approx 3{,}7$.

b) Вычислите относительные погрешности обоих приближений и объясните выбранный вами в пункте (a) ответ.

3. Представьте числа из таблицы в виде десятичных дробей, округлите до одной сотых. Вычислите с помощью калькулятора абсолютную и относительную погрешности (округлите до одной десятых) и дополните таблицу.

Число	Десятичная дробь	Абсолютная погрешность	Относительная опгрешность
$7\frac{5}{8}$			
$\frac{37}{15}$			
$15\frac{9}{11}$			

4. Сеймур определил, что длина доски с точностью до 1 мм равна 269 мм, Талех же определил, что длина другой доски с точностью до 1 см равна 189 см. Какой из мальчиков более точно выполнил своё задание? Почему?

5. Приближённое значение – 4,89, относительная погрешность – 1%. Определите абсолютную погрешность приближённого значения.

6. Погрешность прибора при измерении толщины конского волоса равна 0,005 мм. Показание прибора равнялось 0,35 мм.

a) Как записывается результат измерений?

b) Найти относительную погрешность измерений.

7. Дополните таблицу:

Высота дома	Результаты измерений	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Дом Нармин	12 м	0,1 м	
Дом Угура	5 м		3%
Дом Нигяр	8 м	0,02 м	
Дом Инаята	7 м	10 см	

8. Какие измерений проводились более чувствительным прибором:

a) Масса автомобиля, равная 3 т, измерялась на автомобильных весах с погрешностью 100кг;

b) Масса лекарства, равная 5г, измерялась на медицинских весах с погрешностью 0,01г.

9. Скорость света в вакууме равна $299792{,}5 \pm 0{,}4$ км/сек, скорость звука в воздухе $331{,}63 \pm 0{,}04$ м/сек. Какое измерение более точное?

10. Известно, что грузоподъемность автомобиля $2{,}5 \pm (15\%$ от $2{,}5))$ т. Найдите наибольшую массу груза, которую способен поднять этот автомобиль.

11. Диаметр Луны $d = 3476 \pm 1$ km. Чему равна относительная погрешность измерений?

РАЗДЕЛ 10

3 Задачи на проценты

При решении многих задач выполняются действия над одночленами, применяются формулы в которых записаны произведении чисел и переменных. К таким задачам относятся подсчет числа жителей, расчет банковских операций и другие.

ЗАДАЧА 1: Ахмед, вложив в банк на депозитный счет $10\ 000$ манатов, через год забрал их с 20%-ным ростом. Определите сколько денег забрал Ахмед:

РЕШЕНИЕ:

1. Найдите 20% от числа $10\ 000$.
2. Прибавьте к полученной сумме $10\ 000$.
3. Выскажите своё мнение о полученном результате.

ЗАДАЧА 2: Сабина, вложив в банк $10\ 000$ манатов, забрал их спустя 2 года с 15%-ным ростом за каждый год. Вычислите, сколько денег забрал из банка Сабина:

РЕШЕНИЕ:

1. Найдите 15% от числа $10\ 000$.
2. Умножьте это число на 2.
3. Прибавьте к полученной сумме $10\ 000$.
4. ыскажите своё мнение о полученном результате.

Изучим два способа расчета конечной суммы при банковских операциях. В исследованных задачах полученные из банка деньги оказались увеличены на некоторый процент от первоначальной суммы денег. Такого типа задачи называются задачами на простой процентный рост.

I. ЗАДАЧИ НА ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТНЫЙ РОСТ

В некоторых задачах при больших временных промежутках расчеты усложняются. В этом случае целесообразно пользоваться формулами.

Для вычисления простого процентного увеличения (уменьшения) применяется следующая формула:

$$S_n = S_0\left(1+\frac{r\cdot n}{100}\right), \quad \left[S_n = S_0\left(1-\frac{r\cdot n}{100}\right)\right]$$

Здесь S_0 – первоначальное значение, S_n – конечное значение, r – число показывающие величину процентного изменения за единицу времени, n – промежуток времени.

ЗАДАЧА 1: Айсель взяла кредит в банке на сумму 25000 манат под простой процентный рост в 12% в год. Сколько денег она должна вернуть банку через 2 года?

РЕШЕНИЕ: По условию задачи $r = 12\%$, $n = 2$ года и $S_0 = 25000$ ₼. Так как сумма увеличивается, то по формуле $S_n = S_0\left(1+\frac{r\cdot n}{100}\right)$, имеем:

$$S_2 = 25000\cdot\left(1+\frac{12\cdot 2}{100}\right) = 25000\cdot 1{,}24 = 31000 \text{ ₼}.$$

Ответ: 31000₼

ЗАДАЧА 2: Джамал для оплаты определенной услуги положил на счет 500 манат. В связи с оплатой оказываемой услуги вложенная сумма ежемесячно уменьшалась на 10%. Сколько денег останется у Джамал на счету через 3 месяца?

РЕШЕНИЕ: $S_0 = 500$ ₼, $n = 3$, $r = 10\%$. Так как сумма уменьшается, воспользуемся формулой из примечания: $S_k = S_0\left(1-\frac{r\cdot k}{100}\right)$

$$S_3 = 500\cdot\left(1-\frac{10\cdot 3}{100}\right) = 500\cdot 0{,}7 = 350 \text{ ₼}.$$

Ответ: 350₼

УПРАЖНЕНИЯ

1. Илаха считает, что вложенная ею в банк сумма 300 манат под 30% прибыли через 5 лет составит 750 манат. Как по-вашему, права ли она? Объясните ответ.

2. Вкладчик положил на депозитный счет в банке 100 000 AZN под 3% простого процентного роста. Сколько денег будет у него на счету через 5, 8, 10 лет?

3. Преобразуя выражения $S_n = S_0\left(1+\frac{r\cdot n}{100}\right)$ и $S_k = S_0\left(1-\frac{r\cdot k}{100}\right)$, получите формулы для вычисления следующих величин:
   a) $S_0 = ?$ b) $n = ?$ c) $r = ?$

ОБРАЗЕЦ: b) выразим n из первой формулы. $S_n = S_0\left(1+\frac{r\cdot n}{100}\right)$

Запишем правую сторону в виде суммы: $S_n = S_0 + S_0\cdot\frac{r\cdot n}{100}$

Принесем слагаемое S_0 на левую сторону: $S_n - S_0 = S_0\cdot\frac{r\cdot n}{100}$.

Умножим на 100 *обе стороны равенства:* $100(S_n - S_0) = S_0\cdot r\cdot n$.

Разделим на $S_0\cdot r$ обе стороны равенства: $\frac{100(S_n - S_0)}{S_0\cdot r} = n$

Полученное равенство $n = \frac{100(S_n - S_0)}{S_0\cdot r}$ является формулой для определения n.

4. a) Под какую годовую процентную ставку следует Акифу вложить в банк сумму в 1000 манатов, чтобы спустя 8 лет получить $2\ 000$ манатов?

b) Какая сумма, вложенная в банк с годовым процентным ростом в 18%, спустя год составит $7\ 316$ манатов? Если эта же сумма будет вложена в банк с годовой ставкой в 20%, сколько денег можно получить спустя 2 года?

5. Дополните таблицу, используя формулу простого процентного роста:

No	Банк	Годовой процентный рост	Вложенная сумма (манат)	Срок вложения (лет)	Конечная сумма (манат)
1	I банк		3 000	2	3 840
2	II банк	25%		4	4 000
3	III банк	15,3%	5 000		7 295
4	IV банк	11,5%	7 000	10	

По таблице ответьте на следующие вопросы. Во время вычисления используйте калькулятор:

a) В какую сумму превратятся вложенные в I банк $3\ 000$ манатов через год?

b) Сколько денег выплатит III банк через 6 месяцев за вложенные $7\ 000$ манатов?

c) Сколько денег должен будет выплатить II банк за 4 года при годовой процентной ставке в 20% от начальной суммы, указанной в таблице?

6. Для занятия бизнесом Сулейман взял в кредит $20\ 000$ ₼ на 5 лет из банка под 10% годовых от взятой в банке суммы денег. Сколько денег должен вернуть в банк предприниматель в назначенный срок?

7. В формуле $S_n = S_0(1 + r\%\cdot n)$ число n показывает срок хранения вложенной суммы $\left(r\% = \frac{r}{100}\right)$. Из этих равенств напишите формулу, по которой можно вычислить n. Найдите n, если:

a) $S_n = 500$, $S_0 = 2500$, $r\% = 10\% = 0{,}1$; b) $S_n = 2500$, $S_0 = 500$, $r\% = 25\% = 0{,}25$.

Проверьте себя

8. Для оплаты оказанной ей услуги Лятифа положила на свой счёт 1000₼. По договору за оказание услуги, эта сумма каждый месяц уменьшается на 5%. Через сколько месяцев сумма на счету будет равна:

a) 800 ₼; b) 700 ₼; c) 400 ₼; ç) 100 ₼ ?

9. Чему будет равна через 8 месяцев сумма 800 AZN, вложенная в банк под 12%-й годовой простой прирост.

УКАЗАНИЕ:

8 месяц $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ год

10. Родители Наргиз для получения высшего образования их дочери за границей должны будут заплатить 50000 AZN. Они положили 32000 AZN на депозитный счет в банке под простой годовой 6%-й процентный рост. Наргиз пока ходит в 1-й класс. Хватит ли ей вложенных денег через 10 лет для обучения за границей?

II. ЗАДАЧИ НА СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТНЫЙ РОСТ

Иногда в банковских расчетах для нахождения конечной суммы берется не первоначальная сумма. Полученная сумма в каждой следующий промежуток времени увеличивается на тот же процент, что и полученная сумма денег. Например, положенные на депозитный счет в банке еа 3 года сумма денег первый год увеличивается полученная сумма на процент от полученной в конце первого года суммы, денег на третий год увеличивается на тот же процент полученная в конце второго года сумма денег. Такие задачи называются задачами на **сложный процентный рост**.

ПРИМЕР: Клиент положил на счёт в банке $35\ 000$ ₼ сроком на 2 года. Сколько денег банк должен будет вернуть клиенту через 2 года, если банк каждый год увеличивает сумму предыдущего года на 3%?

РЕШЕНИЕ:

1. Найдите 3% от суммы 35 000 ₼
2. Сложите полученное число с 35 000.
3. Найдите 3% от полученной суммы.
4. Сложите это число с результатом второй операции.
5. Выскажите своё мнение о результате.

ФОРМУЛА СЛОЖНОГО ПРОЦЕНТНОГО РОСТА

Для вычисления сложного процентного прироста числа применяется следующая формула:

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Здесь S_0 – начальная сумма, S_n – конечная сумма, r – число, показывающее процентный рост за единицу времени, n – время.

ЗАДАЧА: Нусрат положил в банк $7\ 000$ ₼. Годовой процентный рост банка составляет 11% от суммы предыдущего года. Какую сумму получит Нусрат через 2 года?

РЕШЕНИЕ: В первый год 7000 ₼ увеличились на 11%. Следовательно, в конце первого года сумма будет составлять $7000+7000\cdot\frac{11}{100}=7770$ ₼. Во второй год 7770 ₼ увеличились на 11%. Следовательно, в конце второго года сумма увеличилась на 11% от суммы первого года: $7770+7770\cdot\frac{11}{100}=8624{,}7$ ₼.

Эту же сумму денег можно получить по формуле сложного процентного роста:

$$S_n=S_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n=7000\cdot\left(1+\frac{11}{100}\right)^2=7000\cdot 1{,}11^2=8624{,}7\ ₼$$

Ответ: 8 624,7 ₼

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исмаил утверждает, что 700 ₼, вложенные в банк с годовым процентным доходом в 10% от суммы предыдущего года, через 2 года составят 800 ₼. Верно ли его утверждение?

2. Архитектор решил гонорар в сумме 100 000 ₼, полученный за проект моста, вложить в два банка. Половину этой суммы он вложил на 3 года в государственный банк с годовым процентным ростом 7% от вложенной суммы, а вторую половину – на 2 года в коммерческий банк с годовым процентным ростом 10% от суммы предыдущего года. Какой банк дал больше дохода?

3. Определённая сумма денег, вложенных в банк с годовым процентным ростом 25% от суммы предыдущего года, через 3 года составила 100 млн ₼. Какой была первоначальная сумма, вложенная в банк?

Указание: Решите, переведя месяцы в годы.

4. Азер взял $5\ 000$ манатов в кредит из банка с годовым процентным ростом в $12{,}5\%$ от первоначальной суммы. Какую сумму он должен вернуть банку через **a)** 6 месяцев; **b)** 15 месяцев?

5. Число автомобилей городского населения увеличивается каждый год на 15% по сравнению с предыдущим годом. Определите во сколько раз выросло число автомобилей в течение 5 лет.

Проверьте себя

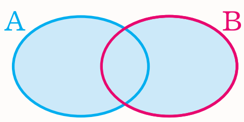
4 Действия над множествами

Вам известно, что такое объединение, пересечение и разность множеств. Все эти действия обладают различными свойствами.

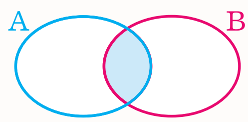
Для множеств A,B,C верны следующие свойства:

Вспомни:
Как определяются элементы объединения множеств? А как – пересечения?

1) Переместительное свойство:

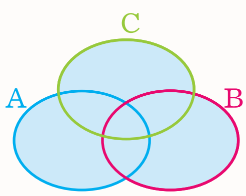


$A \cup B = B \cup A$

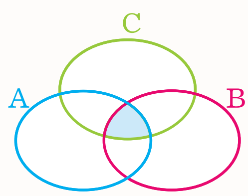


$A \cap B = B \cap A$

2) Сочетательное свойство:

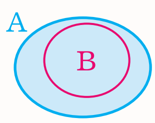


$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

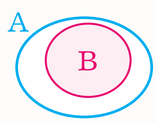


$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) Если $B \subset A$ (B подмножество множества A),



$A \cup B = A$

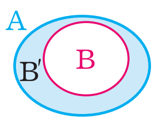


$A \cap B = B$

4) $A \setminus A = \varnothing$.

5) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Если $B \subset A$ то множества, $B' = A \setminus B$ называется дополнонением множества B до A



$B' = A \setminus B$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите число элементов каждого из множеств A = $\{m, n, l, k, p\}$ и $B = \{n, p, g, j\}$. Определите число элементов объединения и пересечения этих множеств. Продемонстрируйте выполнение переместительного свойства.

2. Что вы можете сказать о числе элементов множеств натуральных, целых и рациональных чисел? Какие из них являются подмножествами других множеств? Изобразите их с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

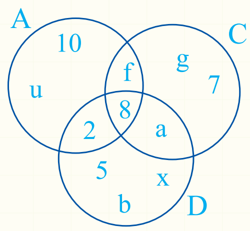


РИСУНОК 8

3. Для множеств A, C, D, приведённых на рисунке 8, проанализируйте нижеследующее:

a) $A \cap C$; **b)** $C \cap D$; **c)** $n(A), n(C), n(D)$; **d)** $A \cup D$;
e) $A \cap D$; **f)** $A \cap C \cap D$; **g)** $A \cup C$; **h)** $A \cup C \cup D$;
l) элементы, входящие только в множество A;
h) элементы, входящие только в множество C;
k) элементы множеств A\D, A\C и D\C.

4. a) Покажите состоящие каждое из трёх элементов два таких множества, чтобы их объединение имело четыре элемента.

b) Покажите такие три множества A и B, чтобы $n(A) = 4$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 2$. Найдите $n(A \cup B)$. Изобразите эти множества с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

5. Каждая семья, проживающая в нашем доме, подписалась на газету, журнал или на то и другое. 75 семей получают газеты, 26 семей – журналы, 18 семей – и газеты, и журналы. Сколько семей проживает в нашем доме?

6. На школьных спортивных соревнованиях по бегу и прыжкам в высоту из учащихся VII класса выполнили нормативы 25 участников. 7 человек выполнили нормативы по обоим видам, 11 человек – только по бегу. Сколько учащихся выполнили нормативы:

a) по бегу; **b)** по прыжкам в высоту;
c) только по прыжкам в высоту?

7. Из 61 учащихся 27 человек занимается коллекционированием медалей, а 35 – марок. 6 человек коллекционируют и медали, и марки. Сколько учащихся ничего не коллекционирует?

8. a) если $n(A) = 18$, $n(B) = 23$ и $n(A \cap B) = 9$, $n(A \cup B) = ?$
b) если $n(M \cup K) = 42$, $n(M) = 35$, $n(K) = 28$, $n(M \cap K) = ?$
c) если $n(C \cap D) = 7$, $n(C) = 19$, $n(C \cup D) = 22$, $n(D) = ?$

Проверьте себя

РАЗДЕЛ 10

5 Задачи на исследование

1. Из бочки с 100 *л* сока отлили 10 *л* и добавили 10 *л* воды. И так несколько раз. Можно ли после нескольких таких действий получить раствор в котором сока будет $72{,}9$ *л*?

2. **a)** При каком наибольшем натуральном значении n число $n!$ Будет кратко $10!$

Указание: Здесь $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

b) При каком наименьшем значении n число $n!$ не будет кратно n.

3. В магазине одежды объявлена акция:

ОБЪЯВЛЕНИЕ

Каждый покупатель, сделавший покупки на сумму свыше 1000 МАНАТ, получает БОНУСНУЮ КАРТУ 100 МАНАТ.

Бонусная карта дает право на получение из этого магазина товаров на сумму 100 манат. Участник акции теряет право на возврат товара.

Нармин хочет купить костюм за 950 манат, туфли за 80 манат и сумку за 60 манат. В каком случае она потратит меньше денег:

a) если купит все сразу;

b) купит костюм и туфли, а сумку получит по карте;

c) купит костюм и сумку, туфли получит по карте?

4. Учитель дал задание ученикам составить задачи на совместную работу. В условии задачи должны быть предложения: «Первая бригада выполнит некоторую работу за a дней, вторая бригада выполнит эту же работу за b дней. За сколько дней две бригады выполнят эту работу работая вместе?» Задачу по требованию учителя надо составить так как, чтобы в ответе получалось «24 дня». Сколько различных вариантов можно составить в этом случае, если a и b натуральные числа и $a > b$?

5. **a)** Два мальчика играют в шашки на доске 8×8. После несколько ходов возникает ситуация, когда число черных свободных клеток больше числа занятых черны клеток в 3 раза, а у одного из мальчиков шашек на 2 больше. Сколько шашек у каждого мальчика?

b) Дочь в одиночку за день может соткать 3 аршина ткани. 4 дня она работала одна, но затем к ней на помощь пришла мать, которая в день ткала 5 аршинов ткани. Они прекратили работать когда их ткани сравнялись длиной. Сколько аршинов ткани они соткали вместе?

c) Мать раздала детям поровну орехи. Четверо из них съели по 12 орехов. После этого четверых вместе осталось столько же орехов сколько орехов мать дала каждому. Сколько орехов мать дала каждому ребенку?

6. Покупатель зашел в магазин, имея 10 манат. Если к оставшейся у него после покупок сумме денег добавить еще одну четвертую остатка, то у него будет 75 гяпиков. Сколько денег у него осталось?

7. Первый из трех братьев вложил в банк a манат с $p\%$-ой прибылью, второй – $2a$ манат с $\frac{p}{2}\%$-ой прибылью, третий $\frac{a}{2}$ манат с $2p\%$-ой прибылью. Покажите, что через год каждый из них получит одинаковую прибыль денег.

8. Предприниматель скупил 200акций некоторой известной фирмы по 100 манат за каждую. При подорожании стоимости акции на $p\%$ он продал половину акций. При подорожании на $q\%$ он продал половину оставшихся акций. Расчитайте прибыль от продажи акций.

9. Древня задаче: Садовник дал трем сыновям 100 лимонов и поручил продавать лимоны по равной цене. По возвращении с базара первый сын вернул 1 манат 80 гярик и 4 лимона, второй сын вернул 1 манат 60 гяпик и 3 лимона и третий – 1 манат 20 гяпик и 1 лимон. Сколько лимонов дал садовник каждому сыну?

10. a) Если справа или слева к данному натуральному двузначному числу приписать 2, то полученные трехзначные числа будет равны. Найти это число.

b) Если разделить число, получающееся из данного натурального пятизначного числа приписыванием к нему справа 2, на число, получающееся из исходного пятизначного числа приписыванием слева 2, то получится 3. Найти это пятизначное число.

11. Ситуационная задача: При подготовке презентации по теме «Бытовые отходы и борьба с загрязнением окружающей среды» школьник составил таблицу с некоторой информацией о естественном разложении некоторых отходов.

Вид отхода	Время разложения
Кожура банана	1–3 года
Кожура апельсина	1–3 года
Картонные коробки	0,5 года
жевачка	20–25 года
газета	Несколько дней
Пластиковая посуда	Свыше 100 лет

a) Школьник решил переделать эту таблицу в столбчатую диаграмму. Насколько целесообразно записать эту информацию в виде столбчатой диаграммы? Объясните.

b) Какую диаграмму предложите вы для такой информации?

12. Клиент банка вложил деньги с 6%-ой годовой прибылю. Если бы он вложил на 5000 манат меньше денег, то за год его прибыль составила бы 1500 манат. Сколько денег вложил клиент?

13. Илаха положила некоторую сумму денег с 12%-ой годовой прибылью на депозитный счет банка. Если бы она положила на 1000 манат больше то через год получила бы 750 манат прибыли. Сколько денег положила Илаха на счет?

14. Поезд, движущийся со скоростью 65км/ч, за 30 секунд. Найдите длину поезда.

15. Поезд, движущийся со скоростью 90км/ч, проезжает мимо лесополосы длиной 800м за 1 минуту. Найдите длину поезда.

16. Самир может доехать в гости к брату тремя видами транспорта: автобусом, поездам и на такси. В нижеследующей таблице показано время, которое он потратит, двигаясь тем или иным видом транспорта:

Вид транспорта	Путь от дома до остановки	Дорога	Путь от остановки до брата
автобус	15 мин.	2ч.15мин	15мин
поезд	25 мин.	1ч. 45мин	20 мин
такси	25 мин.	1ч. 35 мин	5 мин

При каком виде транспорта на дорогу уйдет меньше времени?

Ответы

I. Статистика. Вероятность

Стр. 8-9. №1. a) yaşlı nəsil; b) 13%; **№2.** a) 300; b) yanvar; c) ≈880; **№3.** b) dram dərnəyi и voleybol; **№5.** a) 360 мм; b) 710 мм; c) 6002,5 мм; d) ≈0,53.

стр. 10-12. №1. a) 20 gün; b) ≈ 73%; c) 2 dəfə; **№2.** a) ≈ 66,7%; b) 50%; **№3.** b) 50%; c) 85%; d) 45%; **№4.** a) 0,364 düym ≈ 0,925 см; 0,365 düym ≈ 0,927 см и др. d) 75%; **№5.** a)10,1 м; b) ≈1,6 м; c) ≈12 см; d) 15 см.

стр. 16-18. №1. 1) a) 11; b) 19; 2) 35%; **№2.** a) 5; b) 11; **№3.** b) 63% ; c) ≈9%; **№4.** a) 5-ci avtomobilin reytinqi daha yüksəkdir; b) Məsələn, Q = 3*T + Y + G + 3*R düsturundan istifadə edilərsə, I avtomobilin reytinqi yüksək olar; **№5.** ən az ≈3,2°, ən çox ≈10,3°; **№6.** a) 24%; b) 32%; c) 56%; d) 96%; **№7.** ≈ 0,48; **№10.** a) 14 yaşdan kiçik и 14-17 yaş arası insanların sayı ≈50%-dir. b) 25-34 və 35-44 yaş qrupuna aid insanların sayı bütün idman ayaqqabısı istifadəçilərinin dörddə birini təşkil edir. c) histoqram və ya qrafiklə.

стр. 20. №1. a) 140°F; b) 59°F; c) 122°F; d) 86°F; e) 131°F; f) 145,4°F; g) 41°F; h) 127,4°F; k) 116,6°F; m) 251,6°F; **№2.** a) 5°C; b) 45°C; c) 15°C; d) 65°C; e) 115°C; f) 90°C; g) 35°C; h) 40°C; k) 26,7°C; m) 1,1°C; **№3.** a) 10,8°F; b) 62,6°F; **№4.** 20,5°C-dən 23,3°C-ə qədər; **№7.** Xeyr.

стр. 22-23. №1. a) Türkiyəyə gedən turistlərin sayı hər il artır, Amerikadan gələn turistlər çoxluq təşkil edir və s.; b) 2014-cü ildə bu ABŞ-dan gələn turistlərin sayı azalıb, 600000 nəfər ola bilər və s.; c) Azərbaycan və Yaponiyadan gələnlərin sayı artır; **№3.** Hər iki xəstədə temperatur 37°C-dən yüksək olmuş, sonra Fatimənin temperaturu normallaşmış, Nəzrinin temperaturu isə sabit qalmışdır. Saat 11 (23^{00})-də hər iki xəstənin temperaturu yüksəlmiş, Nəzrində daha yüksək olmuşdur. Gecəyə doğru temperatur düşməyə başlamışdır. Sabaha doğru xəstələrin temperaturunun normal olacağını proqnoz etmək olar. **№4.** a) noyabrda Bakıda ≈49°F = 9,4°C, Şuşada ≈39°F = 3,8°C və Naxçıvanda ≈29°F = -1,6°C dərəcə olacağını demək olar; b) noyabr ayında Şuşada temperatur Bakıdakı temperaturdan 10°C soyuq ola bilər; c) dekabr ayında Şuşada temperatur Bakıdakı temperaturdan 10°C aşağı ola bilər; **№5.** a) 3-cü həftədə; b) 6-cı həftədə; c) 10-cu həftə.

стр. 26-27. №1. a) azimkanlı hadisə; b) azimkanlı hadisə; c) yəqin – 1; **№2.** 0,5; **№3.** 0,4; **№4.** $\frac{7}{16}$; $\frac{1}{4}$; **№5.** $\frac{12}{17}$; **№6.** a) $\frac{1}{10}$; b) 0,1; c) $\frac{1}{18}$; d) $\frac{1}{6}$; e) 0,1; f) $\frac{4}{45}$; **№8.** a) 0,1; b) 0,2; c) 0,07; d)0,08; **№9.** a) $\frac{5}{36} \approx 0{,}1$; b) $\frac{2}{9} \approx 0{,}2$; c) $\frac{1}{6} \approx 0{,}2$; **№10.** a) 0,125; bir əlverişli hal var; b) 0,25; iki əlverişli hal var; c) 0,125; oxun hər mavi rəngli hissədə dayanması hadisəsinin ehtimalı 0,125-dir (hər hissəyə ayrılıqda baxılır); d) 0,375; üç əlverişli hal var; e) 0,125; oxun hər qırmızı rəngli hissədə dayanması hadisəsinin ehtimalı 0,125-dir.

стр. 29-30. №1. dairə 5 bərabər hissəyə bölünür, 2 hissə qırmızı rənglənir. **№2.** a) P(qırmızı və ya yaşıl) = 0,25; b) P(sarı olmayan) = 0,75; c) P(qara olmayan) = 1. **№3.** a) P(3) = $\frac{1}{6}$; b) P(2 или 5) = $\frac{1}{3}$; c) P(5-dən kiçik) = $\frac{2}{3}$; d) P(6-dan fərqli) = $\frac{5}{6}$; e) P(sadə ədəd) = $\frac{1}{2}$; f) P(9) = 0; **№4.** 0,96; **№5.** a) P(m, n, p или t) = 0,125; b) P(я) = 0; c) P(samit) = $\frac{23}{32}$; d) P(sait) = $\frac{9}{32}$; e) P(dodaqlanan sait) = $\frac{1}{8}$; f) P(incə sait) = 0,125; **№6.** a) 0,2; b) artar; **№7.** a) 0,9; b) 0,6; **№8.** a) 0,6; b) 0,5; **№11.** a) 0,5; b) 1; c) 0,5; **№ 12.** Xeyr; **№ 13.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{4}$; **№14.** $\frac{1}{2}$.

стр. 31. №1. a) 55°C = 131°F, 12°C = 53,6°F, 93°C = 199,4°F, 61°C = 141,8°F; b) 125°F = 51,6°C, 42°F =5,6°C, 35°F = 1,7°C, 112°F = 44,4°C; **№2.** a) P(8) = $\frac{2}{5}$; b) P(2, 6, 10 или 12) = $\frac{2}{5}$; **№3.** b) $\frac{1}{2}$; **№4.** a) P(12) = $\frac{2}{5}$; b) P(cüt ədəd) = 0,5; c) P(sadə ədəd) = 0,3; d) P(kəsr) = 0; e) P(1-dən kiçik) =0; f) P(25-dən böyük) = $\frac{1}{6}$; g)P(2 və ya 3-ün böləni) = $\frac{1}{6}$; h) P(sonu 5-lə bitən) = 0,1; **№5.** d) göy; **№6.** a) 36; b) 30; $\frac{1}{3}$; **№7.** a) 6%; b) 94%; c) 14100.

II. Рациональные числа

стр. 34: №1. a) doğru deyil; b) doğrudur; c) doğru deyil; d) doğrudur; e) doğrudur; **№4.** a) {14; –5; 0; – 82; 12; 1} и {– 11; 17}; b) {14; 12; 1} и {17}; c) { –5; – 8,2; – 82} и {$-\frac{11}{15}$; – 22,3; – 11}; d) 14; 3,5; $\frac{4}{9}$; 12; 1} и {1,7; 17; 22,1; 0,93} ; **№6.** a) $\frac{4}{5} = \frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{6}{14} = \frac{12}{28}$; c) $1{,}25 = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \frac{125}{100}$; d) $-5{,}2 = -5\frac{2}{10} = -5\frac{5}{25} = \frac{-520}{100} = -\frac{26}{5}$; **№7.** Nümunə: a) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$; $-\frac{7}{12} = -\frac{14}{24}$; $-3\frac{5}{15} = -3\frac{1}{3}$; $\frac{125}{100} = \frac{21}{9}$; b) $-2{,}3 = -2\frac{3}{10}$; $7{,}25 = 7\frac{1}{4}$; $0{,}24 = \frac{12}{50}$; $9{,}03 = \frac{903}{100}$; **№8.** 1) 4 dəfə böyük olar; 2) *m* dəfə.

стр. 36-37. №1. a) {0,(7); 5,333...; 32,(56); 6,98(3); 0,(345); 1,43(12); 2,0(7)}; b) {0,(7); 5,333...; 32,(56); 0,(345)}; c) {6,98(3); 1,43(12); 2,0(7)}; d){3,4; 2,003; 0,444; 0,5; 8,111}; **№2.** 0,1(6) – qarışıq; 2,32999... = 2,32(9) – qarışıq; 21,823823823...=21,(823); 9,09323232...=9,09(32) – qarışıq; 1,64026402... =1,(6402) – saf; 3,454545...

= 3,(45)– saf; 0,123444... = 0,123(4) – qarışıq; 3066,666... = 3066,(6) – saf; 0,24752475...= 0,(2475) – saf; 93,02654654...= = 93,02(654) – qarışıq; **№4.** $\frac{1}{3}$ = 0,(3); $\frac{5}{9}$ = 0,(5); $\frac{7}{12}$ = 0,58(3); $\frac{3}{16}$ = 0,1875; $\frac{12}{18}$ = 0,(6); $\frac{9}{20}$ = 0,45; $\frac{11}{21}$ = 0,(523809); $\frac{17}{28}$=0,60(714285); $\frac{30}{32}$ = 0,9375; $\frac{10}{48}$ = 0,208(3); $\frac{21}{50}$ = 0,42; $\frac{16}{72}$ = 0,(2); $\frac{10}{75}$ = 0,1(3); $\frac{20}{99}$ = 0,(20); $\frac{84}{200}$ = 0,42; $\frac{465}{555}$=0,(837); $\frac{900}{1000}$ = 0,9; **№5.** Haqlıdır.

стр. 38-39. **№1.** a) $\frac{8}{9}$; b) $1\frac{7}{9}$; c) $10\frac{5}{11}$; d) $\frac{1}{6}$; e) $8\frac{68}{90}$; f) $15\frac{232}{990}$. **№2.** a) $\frac{2}{9}$; $1\frac{1}{3}$; $3\frac{6}{11}$; $21\frac{23}{99}$; $\frac{673}{999}$; $7\frac{256}{999}$; $16\frac{2}{999}$; $\frac{1}{9999}$; 5, $\frac{1}{99}$; b) $\frac{2}{15}$; $1\frac{23}{90}$; $7\frac{2}{45}$; $2\frac{107}{450}$; $10\frac{72}{495}$; $\frac{1279}{4950}$; $16\frac{497}{990}$; $\frac{1}{9000}$; **№3.** a) 2,(7) = $2\frac{7}{9}$ и 2,4(7) = $2\frac{43}{90}$; b) 0,(54) = $\frac{54}{99}$ и 0,3(54)=$\frac{351}{990}$; **№5.** a) 1,2(5) = 1 + 0,2 + 0,0(5) = 1 + $\frac{2}{10}$ + $\frac{5}{90}$ = 1 + $\frac{18}{19}$ + $\frac{5}{90}$ = 1 + $\frac{23}{90}$ =$1\frac{23}{90}$; **№6.** a) $8\frac{m}{9}$; b) $\frac{\overline{abc}-a}{990}$; c) $1,m(nmm) = 1,(mnm) = 1\frac{\overline{mnm}}{999}$; **№7.** $\frac{a}{9}$ и $7\frac{\overline{ba}-b}{90}$; **№8.** 7,(9999) = $7\ \frac{9999}{9999}$ = 8; 0,13; – 3,9; **№9.** ≈1600 мм^2; ≈2400 мм^2.

стр. 41. **№1.** a) Ədəd oxu üzərində hesablama başlanğıcından sağdakı nöqtənin koordinatı müsbət, soldakı nöqtənin koordinatı mənfi, hesablama bağlanğıcı ilə üst-üstə düşən nöqtənin koordinatı isə sıfırdır; b) əks ədədlər; c) xeyr; **№2.** a) xeyr; b) bəli; c) bəli; d) bəli; **№4.** N(-5); M(-3,6); K(-2,(1)); A(-0,5); C(1,(8)); B(4); D(5,8); **№5.** 5,8; 2,78; (0,56); 3,67(4)).

стр. 43. **№1.** a) AB = 4,43; b) MN = 6,75; c) CD = 3 ; d) FD = 6.38(98); e) KF = 0,(06); f) EH = $6\frac{16}{35}$; **№2.** a) $8\frac{5}{6}$; **№3.** -11,41; **№4.** a) N(0,64) или N(-6,44); b) M(-2,53(8)) или M(11,23(8)); **№5.** a) 10; b) {-10, -9, -8,-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}; c) -126, 76, 78 и др.; **№6.** 88; **№7.** 116 см, B(111).

стр. 44-46. **№1.** a) 5,(8) > -12,(9); b) 3,(5) > 3,55; c) -2,(67) < -2,676; d) 11 = 10,(99); e) 21,56(5) < 21,5657; f) -0,78(3) < -0,(78); **№2.** a) < ; b) < ; c) =; d) >; e) >; f) =; g) >; h) >; **№3.** 2 и 3; -1 и 0; 0 и 1; 1 и 2; -6 и -5; 31 и 32; -582 и -581; **№6.** a) -3,5; $-3\frac{1}{12}$; -0,3; $-\frac{15}{7}$; $\frac{-3}{5}$; $\frac{4}{-15}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{25}{7}$; b) $\frac{7}{2}$; $\frac{13}{11}$; $\frac{20}{27}$; 0,5; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{9}$; $\frac{4}{-17}$; $\frac{-34}{34}$; $-1\frac{1}{13}$; -2,3; -2,(3); **№7.** a) $m > 0$; $n < 0$; b) $\frac{1}{3}n > 3n$; c) $|0{,}5m| < |n|$; **№8.** b) a-b < b+a < b-a (şəkil 13a); b+a < a-b < b-a (şəkil 13b); b+a < b-a < a-b (şəkil 13c); c) $|b+a| < |a-b| = |b-a|$ (şəkil 13a); $|a-b| = |b-a| < |b+a|$ (şəkil 13b); $|a-b| = |b-a|<|b+a|$ (şəkil 13c); **№9.** a) xeyr; b) modulu böyük olan ədəd kiçikdir; **№10.** a) bəli; b) bəli; c) bəli; d) bəli; e) xeyr (eyni ədəd olduğu hal nəzərə alınmır); f) bəli; **№11**. 1) a) $p < k$ olduqda, b) $|p| < |k|$ olduqda; c) $|p| > |k|$ olduqda; 2) $m < n$ olduqda $|m| > |n|$, $m > n$ olduqda $|m| < |n|$; 3) I hal: $a > b$ и $a + b < 0$ olarsa, $|a| < |b|$; II hal: $a > b$ и $a + b > 0$ olarsa, $|a| > |b|$; III hal: $a < b$ и $a + b < 0$ olarsa, $|a| > |b|$; IV hal: $a < b$ и $a + b > 0$ olarsa, $|a| < |b|$.

стр. 48-50. **№1.** a) $x > -0{,}8$ и $x < 3{,}4$; b) $y > 6{,}8 \leq$ и $y < 11$; c) $a > -100$ и $a \leq 112$; f) $n \geq -8\frac{2}{9}$ и $n < -4{,}(5)$; **№2.** a) $8 < a < 12{,}3$; b) $-3{,}(4) < y \leq 0$; c) $0{,}75 \leq x \leq 5{,}6$; d) $-11{,}9(3) < m < 4{,}5$; e) $-2 < p < 2$; f) $-25 \leq k \leq 100$; **№3.** a) $0 \leq x \leq 4{,}2$; b) $-5 < y \leq 7{,}8(56)$; c) $-\frac{22}{7} \leq a < 0$; **№4.** a) A={1,2, 3,4, 5,6, 7}, n(A) = 7; b) B ={-11,-10, -9,..., 9, 10, 11}, n(B) = 23; c) C ={-45,-44, -43, -42, -41}, n(C) = 5; d) D ={5, 6, 7, 8, 9}, n(D) = 5; **№5.** a) A = {1, 2, 3, 4}, n(A) = 4; b) B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, n(B) = 10; c) C={∅}, n(B) = 0; d) D ={5, 6, 7, 8, 9, 10}, n(D) = 6; **№6.** a) 9 и 11; b) -5 и -2; c) -128 и 0; d) -3 и 2; **№7.** a) {-4; -7,6} ; b) {-4} ; c) {∅}; d) {-4; -7,6; -0,2; 0; 1,2; 3,45; 7,6(12)}; e) {-4; -7,6; -0,2; 0; 1,2; 3,45 }; f) {-0,2; 0; 1,2; 3,45; 7,6(12)}; **№8.** a) a + (-3) < -0,5 ; b) $|x| \leq 4{,}5(7)$; c) $|b - 11{,}(2)| \geq 3$; d) $m - 1{,}(23) < 7{,}4 - 9{,}(4)$; **№11**. a) $x - 6 < 13$; x = {7, 8, 9, 10, 11, 12} ; b) 7 и 10; c) 6 и 9; **№ 15**. a) $a < 0$ olduqda $|x| > a$ bərabərsizliyinin sonsuz sayda həlli var, çünki istənilən ədədin modulu mənfi ədəddən böyükdür; b) 0-dan başqa istənilən ədəd bərabərsizliyi ödəyir; c) kökü yoxdur; d) $-a < x < a$; e) 0; f) $-a \leq x \leq a$.

стр. 53-55. **№1.** a) bəli; b) xeyr; c) xeyr; d) xeyr; e) bəli (0-dan başqa); **№2.** a) -15,5; b) 1; c) $-\frac{7}{44}$; d) -2,48; e) -5; f) $-18\frac{7}{15}$; g) -14; h) -32; k) -5,4; **№3.** a) 6,8; b) $-1\frac{11}{12}$; c) -11,5; d) 15; e) $1\frac{97}{255}$; f) $7\frac{7}{15}$; **№4.** a) -0,5; b) 14,73; **№5.** a) 0,0(12); b) 18; c) 140; d) 13,(703); **№6.** 114,(148); **№7.** a) 8 ay; b) 10000q; c) 287,(3); d) 12,75; **№8.** a) Nümunə: $\frac{3}{12}$; b) $\frac{4}{12}$; c) sonsuz sayda; **№9.** 6,4 q yağ, 5 q zülal, 9,4 q karbohidrat; **№10.** 5-dən böyük sadə ədədlərin hər birindən ya 1 vahid böyük, ya da 1 vahid kiçik ədədlər 6-ya bölünür; **№11.** 4881,4 км; 2440,6 км; **№12**. a) 4,8; b) 0,8; c) $1\frac{1}{3}$; d) 0,(6); e) 11,625; **№13**. a) >; b) <; **№14**. a) 2; b) 3; c) 6; d) 32; **№15**. a) $8\frac{3}{16}$; b) $\frac{5}{6}$.

стр. 56. **№1.** 13 kitab, 19 kitab; **№2.** Nümunə: 9,5546; 9,5549 и др.; **№3.** 1) a) $a + b$ = 7,2, nümunə: 7,1<7,2 < 7,3; b) $a + b$ = 7,24, nümunə: 7,2 < 7,24 < 7,25; c) $a + b$ = 7,237, nümunə: 7,236 <7,237 < 7,238; 2) 2 и 3; 3) nümunə: -2,99 и -2,8; tam sərhədlər -3 и -2; **№4.** $n < m < k$; $k > m > n$; **№5.** a) ikinci; b) birinci; **№6.** 1300 < h < 1600; {1301; 1302; … ; 1598;1599}; **№7.** a) 16,335; b) -8,246; c) -3,56; d) 89,096; e) -0,004; f) 60.

III. Параллельность. Перпендикулярность

стр. 58-59. **№1.** a) AC, AK, AE parçaları; b) C, K, E nöqtələri; c) AB parçası; d) B nöqtəsi; m) BC, BK, BE parçaları; n) AB parçası; ∠ACB, ∠AKB, ∠AEB; **№2.** a) perpendikulyarın uzunluğu; b) ən kiçik meyil bucağı olan; **№3.** MB⊥ NC; KD⊥PA; b) MP⊥ NK; MO⊥KO; NO⊥PO; OP⊥OK; c) OA⊥ON; OB⊥OK; OA ⊥OK; **№4.** Xeyr; **№5.** a) itibucaqlı üçbucaqda hər təpədən qarşı tərəfə qədər məsafə bu təpədən qarşı tərəfə çəkilmiş perpendikulyar olur. b) düzbucaqlı üçbucaqda itibucaq təpəsindən qarşı tərəfə qədər məsafə tərəflə üst-üstə düşən məsafədir; **№6.** 3 см 4 мм и 10 см 2 мм; **№7.** 12 см, 15 см и 16,2 см; **№8.** 16 см; **№9.** a) 15 см или 3 см; b) iki hal: 7,5 см или 1,5 см; **№10.** c < d. **№11.** Əksini fərz etməklə isbat edin.

стр. 63. **№2.** xeyr; **№3.** a) xeyr; b) bəli; c) bəli; d) bəli; e) bərabərtərəfli üçbucağın, bəli; **№4.** Əvvəlcə AA_1 və BB_1 nöqtələrinin simmetriya mərkəzi tapılır, sonra həmin mərkəzə nəzərən P nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə qurulur.

стр. 64-65. **№3.** Qonşu və qarşılıqlı bucaqların xassələrindən istifadə edilir; **№7.** 180°; **№8.** 540°; **№9.** 264°; **№10.** 1080°; **№11.** a) 7 и 12; 6 и 9 (daxili); 8 и 11; 5 и 10 (xarici); b) 2 и 11; 3 и 12; 4 и 9; 1 и 10; c) 2 и 6; 3 и 7; 4 и 8; 1 и 5; **№12.** a) $\angle 2 = 124°$; $\angle 4 = 58°$; b) $\angle 2 + \angle 3 = 84°$; c) $\angle 3 - \angle 1 = 32°$.

стр. 68-71. **№2.** Düz xətlərin paralellik xassəsinə görə əsaslandırılır; **№4.** a) bəli; b) bəli; c) xeyr; **№5.** $a \parallel b$; **№6.** AB|| DE; **№9.** Kəsişir; **№10.** a) 50°; b) 172°; c) 68°; d) 45° и 135°; **№11.** 75°; 105°; **№13.** 103°; $a \parallel b$; c и d düz xətləri paralel deyil; **№14.** a) 53°; b) 109° ; c) 65°; d) 69°, 54°, 57°; **№15.** 115°, 115°, 65°, 65°; **№16.** a) 75°; 105°; b) 52°; 128°; c) 80°; 100°; **№ 17.** AB düz xətti; **№18.** Daxili çarpaz bucaqların bərabərliyindən istifadə edin; **№19.** ML и NK; **№20.** a) Paraleldir; b) paraleldir; c) paralel və ya kəsişəndir; **№21.** a) 50°; b) 70°; **№22.** 45° и 20°; 95°; 60°, 130° и 110°.

стр. 74-75. **№1.** b) $\angle GLP$, $\angle DUC$ и $\angle SET$; c) 28° или 152°; 150° или 30°; 90°; d) 67°; **№3.** a) $\angle BOD$ açıq bucaqdır; b) $\angle PSR$-düz bucaqdır; **№4.** a) 60° или 120°; b) 105° или 75°; **№5.** a) 45°; b) 118°; c) 28° и 152°; **№6.** a) 66°; b) 101°; c) 102°, 78°; **№7.** a) 56° или 124°; b) 40°, 140°; c) 135°, 45°; d) 48°, 48° или 76°, 104°; **№8.** a) 30°, 150°; b) ±10800; c) 67,5°, 112,5°.

стр. 76. **№1.** 160°, 20°, 20°; **№4.** Bəli; **№5.** a) 30°; b) 90°; c) 45°; **№8.** a) 20°; b) 60°; **№9.** a) 36° и 144°; b) 60° и 120°; c) 80°, 100°; d) 84° и 96°.

IV. Одночлены. Многочлены

стр. 80-82. **№2.** a) 5^7; b) $(-0,7)^5$; c) 9^{15}; d) x^{14}; e) a^6; f) $-y^9$; **№3.** Müəllimin cavabı; **№4.** a) $-15a^5$; b) $-7b^{13}$; c)$-4,5c^9d^8$; d) $-10x^7y^6$; e) $12x^2y^3$; f) $-0,7abc^3$; g) $-a^5$; h) $-0,36m^3n$; m) $1\frac{2}{3}bc^6y^5$; **№5.** Nümunə: a) $14a^3bc^7 = 2ac^5 \cdot 7a^2bc^2$; b) $-3\cdot 5x^3x^2y^3 = -15x^5y^3$; **№6.** Nümunə: a) $4abc^2$ и $4mn$; b) xy və $-xy$; **№7.** a) $21m^3nd^3$; b) $0,3k^2x^{10}$; c) $2,3cab^3 \cdot \left(\frac{1}{3}ac\right)^2 = \frac{23}{90}a^3b^3c^3$; d) $-10x^4y^3$; e) $5a^7b^5$; f) $-0,0104ab^3n^7$; **№8.** a)128; b) 125; c) 1,96; d) $\frac{81}{256}$; e) $\frac{1024}{243}$; f) $-\frac{64}{125}$; g) $\frac{196}{81}$; h) 243; k) -0,343; m) $\frac{49}{144}$; n) $-\frac{243}{64}$; l) $\frac{4}{9}$; **№9.** a) $7^2 \cdot 7^3$; b) $9^a \cdot 9^b$; c) $(-11)^3 \cdot (-11)^2$; d) $\left(\frac{7}{15}\right)^p \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^q$; e) $m^5 \cdot m^7$; f) $b^x \cdot b^y \cdot b^z$; **№10.** a) $\frac{1331}{729}$; b) $\frac{49}{8100}$; c) $\frac{14641}{6561}$; **№ 11.** a) 13; b) $-\frac{63}{256}$; **№12.** a) $0,7^2$; $0,8^2$; 13^2; $\left(\frac{6}{5}\right)^2$; $1,2^2$; $\frac{10}{11}$; b) 4^3; $(-6)^3$; $0,1^3$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; $\left(\frac{6}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{7}{6}\right)^3$; c) 5^2; 5^3; 5^4; 5^6; **№13.** a) 2^8; b) 2^7; c) 2^{10}; d) 2^8; e) 2^{14}; f) 2^{13}; **№14.** a) 3^3; b) 3^7; c) 3^6; d) 3^9; e) 3^9; f) 3^{10}; **№15.** a) $2ab$; b) $6xy$; **№16.** a) $4a^4bc$; b) $62,8x^3$; c) $\frac{729}{64}m^{18}$.

стр. 83-85. **№1.** a) a; b) x^{14}; c) b^{26}; d) $m^{12} : m^8$; em) a^9; f) k^{46}; g) n^6; h) $b^{13} : b^8 : b^2 = b^3$; **№2.** a) $\frac{x^3}{5}$; b) $4b^2$; c) x^6; d) m^8; e) 16; f) $(3,5)^4$; **№3.** 9; **№4.** a) 27; b) 1000; c) -8; d) 4913; **№6.** a) $-3x^2$; b) $3a^2$; c) $2a^2b^2$; d) $-7m^7$; e) 1; f) 1; g) $\frac{31x^3z^2}{7y^4}$; h) $\frac{b^5}{3}$; **№7.** a)$7\frac{18}{49}$; b) $-\frac{7^7}{6^7}$; c) 0,49; d) 27; e) 2; f) 7^3; g) 5^9; h) 1; k) 0,7; **№8.** Nümunə: a) $x^5 \cdot x^4 \cdot x$; b) $y^4 \cdot y^2$; c) $11^3 \cdot 11^4$; d) $4^{10} \cdot 4^3$; e) $9^3 \cdot 9^2 \cdot 9^9$; f) $5^{15} \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^2$; **№9.** a) c^6; b) c^7; c) c^{10}; d) c^7; e) c^4; f) c^{25}; **№10.** a) 7^6; b) 11^3; c) a^{21}; **№11.** x; **№12.** a) x^4; b) a^9; c) ; d) 0; e) 2; **№13.** a) 7; b) a; c) 11^3; d) 3^{19}; e) 4^7; f) m^3; **№14.** Nümunə: a) $m= 4$, $n = 12$; b) $m = 13$, $n = 23$; c) $m = 2$, $n = 8$; **№15.** Kəsrin surətindəki ədədin rəqəmlərinin cəmi 3-ə bölünür: c) = 999…96; **№16.** a) 3-ün qüvvətlərini araşdırın: $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4=81$; ...; hər 4-cü qüvvət 1 ilə qurtarır; b) $10^k - 1 = 999...999$ – rəqəmlərin cəmi 3-ə bölünür; **№17.** a) a^3, a^2, a; b) a^3, a, a^2; c) $a > 1$; a, a^2 и a^3; d) a^3, a, a^2.

стр. 87-88. **№1.** a) x^6; c) m^{35}; d) x^5; e) x^4; f) n^{26}; g) m^{10}; **№2.** a) 3; b) 4; c) 7; d) x^4; e) 5; f) 13; **№3.** Hər ikisi; **№4.** a) $16x^4y^2$; b) $-8m^9n^6$; c) $256a^4x^{12}$; **№5.** a) $9xy^2$; b) $12\,a^2bc^3$; c) $13\,y^6$; d) $0,2m^5$; e) $\frac{3}{5}b^4$; **№6.** a) $4x^3$; b) $5\,a^2c^2$; c) $6y^4$; d) $0,3m^5$; e) $-\frac{2}{3}b^3$; **№7.** Nümunə: a) 0,09; b) 0,125; c) $\frac{1}{64}$; **№8.** a) $(2^2)^{10}$; b) $(2^4)^5$; d) $(2^{10})^2$; **№9.** a) $27x^6$; b) $-8m^{12}n^6$; c) $-x^{10}y^5z^{20}$; d) $0,36a^6b^2c^8$; e)$16x^4y^{12}$; f) $-x^{10}y^{25}z^{20}$; g) $-\frac{1}{8}k^{21}$; h) $\frac{144}{25}a^2b^2c^6$; **№10.** a) $(a^3b^6)^2 = (a^2b^4)^3$; b) $(1000x^{12})^2 = (100x^8)^3$; c) $(0,001p^9)^2 = (0,01p^6)^3$; **№12.** a) $-x^{11}y^8$; b) $9x^{14}y^{14}$; c) $8a^6b^{18}c^3$; d) $144\,x^8y^{18}$; e) $0,25a^2b^2c^{12}$; f) $3^7m^{14}n^{13}$; g) $-\frac{2}{7}a^{13}b^{14}$; **№13.** a) $3^4x^{10}y^8$; b) $2^2x^{16}y^{24}$; c) $\frac{1}{4}x^2$; **№14.** a) $\frac{9}{49}$; b) $\frac{-3125}{59049}$; c) $\frac{729}{64}$; d) $\frac{m^9}{n^9 \cdot k^9}$; e) $\frac{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4}{9^4}$; **№ 15.** a) 2^5; b) $\left(\frac{5ab}{4}\right)^2$; c) $\left(\frac{2mn^2}{k^3}\right)^5$.

стр. 90-91. **№2.** dərəcə: a) 5; b) 4; c) 5; d) 5; e) 8; f) 4; **№3.** a) $7xy$; b) $-3x^4 + 9x^2 + x$; c) $-5ab + 3a^2b$; d) $7a^3 + 2a^2 - a - 32$; **№4.** d) $3a^2 + b$; **№5.** a) $21p^3 - p^2$; 3; b) $3a^3 - 5a^2 - a$; 3; c) $8x^6 - 2x^5 - 6x^3$; 6; d) $14ab^2 - 0,2b^3 - 1$; 3; sərbəst hədd “-1”; **№6.** a) 7; b) 3; c) 1; d) 3; e) 5; f) 2; **№7.** a) $-4a^3 - 4ab + b^2$; 52; b) $-7mn - 12mn^2$; -17; c) $11xy^2 + x^2y$; 298; **№8.** Nümunə: a) $9ab - 5a + 7a^2$; b) $4a - 3ab - 8a^2 + 5a + 7a^2$; **№9.** a) $100c + 10b + a$; b) $90a + 9b + c$; c) $110a + 2c$; d) $110c + 11a + b$; e) $1001a + 1100b + 110c + 11b$; f) $101a + 10b + 79$; **№10.** $\overline{abbb} - a = 111(9a + b)$ hasilinin 37-yə bölündüyünü göstərin.

стр. 92-95. №1. a) $3a^3 - 18a + 5$; b) $3a^3 - 18a + 5$; c) $a^3 + 4a + 11$; d) $-a^3 - 4a - 11$; **№2.** a) $a^2 + a + 1$; b) $6x^2 + 2x + 5$; c) $-2y$; d) $-2c + 4$; e) $-n^2 - 1$; f) 4; **№3.** a) $-3{,}9x + 3{,}1x^2$; b) $2{,}2a^2 + 5$; c) $-3{,}7k^2 + 5{,}7k$; d) $0{,}2b^2 - 7b + 4$; **№4.** a) $12a - b$; b) $8a^2 - 7$; c) $-5b^2 + 3b$; d) $0{,}27x^2 - 0{,}06y^2$; **№5.** a) a^2; 2; b) $7a^2 - 3b^2 + 2ab$; 2; **№6.** a) $-12y^2 - 16y + 10$; b) $-8x^2 + 5x - 10$; c) $5b^3 - 16ab + 6a^2$; d) $-10x^5 - 7$; **№7.** a) Yusif və Nağının; b) Yusif və Nazirin; c) Nağı və Nazirin; d) 1031 AZN; 1173 AZN; 2045,1 AZN; 725,9 AZN; **№8.** a) $8x + 20$; b) $6x - 5$; c) $7x + 8$; d) $13x$; **№9.** a) Ardıcıl tək ədədləri $2x - 1$, $2x + 1$, $2x + 3$ və s. kimi işarə edin; c) ardıcıl natural ədədləri n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ kimi işarə edin; **№10.** a) $5a - b - 11c$; b) $8x^3 + 2x^2 - 4x$; c) $7ax^3 + ax^2 + 12ax$; d) $1{,}4a^3 - 3b^3 + 2$; **№13.** a) $32a^2$; b) $30x^2y$; **№14.** a) $-5x^2 + 2xy$; b) $-3y^2 + 2xy$; **№ 16.** $-y^2 - 1{,}5y + 1$; **№17.** a) 10,5; b) 3; **№18.** a) $-1\frac{3}{4}b^3 - 5\frac{3}{5}b$; b) $\frac{1}{4}b^3 + 10\frac{4}{5}b$; c) $2\frac{1}{4}b^3 + 2\frac{2}{5}b$; d) $1\frac{3}{4}b^3 + 5\frac{3}{5}b$; **№ 19.** Nümunə: a) $4b^3 + 12 + (-6b^2 - 8{,}2b)$; b) $(4a^3 - 4a) + (-5a^4 + 3a^2)$; **№ 20.** Nümunə: a) $(3x^2 + x) - (x^3 + 8)$; b) $7y^3 - (6 - 3y^4 - 4y^2)$; **№21.** Göstəriş: a) $n^3 + n + 30n$; b) $n^3 + n - 30n$; **№22.** a) $-7a$; b) $2xy$; **№24.** a) $4m^2 - 10m - 4$; b) $-24m^3 - 20m^2 - 4m - 5$; c) $-32m^5 + 4m^3 - 24m^2 + 22m$.

стр. 96-98. №1. a) $10x + 35$; b) $3m^2 + 27m$; c) $8b^2 - 88b$; d) $-3x^2 + 6x$; e) $10x^3 - 6x^2$; f) $-20c^7 - 2c^5$; g) $6a^2 - 12a + 36$; h) $2x^3 - 14x^2 + 2x$; k) $1{,}7y^3 - 2{,}04y^2 + 6{,}8y$; **№2.** a) $40x^8 + 30x^7 - 50x^5$; b) $7n^5k^4 + 11n^4k - n^3k^4 + 15n^2$; c) $8a^3b^4 + 10a^2b^4 - 2{,}1a^2b^2$; d) $3{,}3x^2y^3 + 6x^3y^3 - 1{,}5\,x^3y^3 + 6{,}9\,x^2y^6$; **№3.** a) $0{,}6x^4 - x^2y$; b) $\frac{1}{4}m^4n^2 + \frac{1}{6}mn^4 - \frac{1}{8}m^2n^2$; c) $-0{,}2a^2b^7 + 0{,}7a^3b$; d) $-\frac{6}{25}p^8k^3 + \frac{1}{4}p^6k^3 + p^3k^6$; **№4.** a) -4,7; b) -85; c) 7,6; d) -22; **№5.** $3a^2b + 6ab^2 + 3abc$; **№6.** 156; **№7.** a) 3; b) 16; c) 0; d) $-x^2 - 3 < 0$; **№9.** a) $-m^4 + \frac{2}{3}m^3 - 1{,}5m^2n$; b) $-x^4 - 3x^3 + 3{,}5x^2$; c) a^2; d) $7x - 3x^2$; e) $5a + 15a^2 - 5a^5$; f) $3a^6x - 6a^5x^2 - 3a^4x$; g) $0{,}4x^3 - xy$; h) $\frac{1}{3}a^3b - \frac{3}{8}a^2b^2 + \frac{2}{5}ab^3$; k) $-0{,}4c^2d^2 + 2b^2c^2$; m) $-2a^3y^7 + 0{,}2a^4by^5 + \frac{1}{3}a^5y^5$; **№10.** a) 7; b) 8; c) 49; d) 0,4; e) -2; f) 24; **№11.** a) 0,5; b) -2; c) 1,6; d) -2; **№12.** 20 см, 16 см, 8 см; **№14.** a) $4x^2 + 18x$; b) $6y^2 + 12y$; c) $20b + 4b^2$.

стр. 100-101. №1. a) $x^2 + 4x + 3$; b) $x^2 - x - 6$; c) $x^2 + 8x + 16$; d) $2x^2 + 5x + 3$; **№2.** a) $x^2 + 6x + 9$; b) $x^2 + 5x + 4$; c) $2x^2 + 7x + 3$; d) $3x^2 + 7x + 2$; e) $2x^2 + 11x + 12$; f) $3x^2 + 4x + 1$; **№3.** a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$; b) $-3x^3 + 11x^2 - 10x$; c) $c^2 - 16$; d) $30x^4 - 61x^2y^2 + 30y^4$; e) $2a^3 + a^2b^2 + 4ab + 2b^3$; f) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$; **№4.** a) $2x^3 + 13x^2 + 18x - 9$; b) $x^4y - x^4 - 11x^2y^2 + 11x^2y + 5xy^2 - 5xy$; c) $a - a^2c - b + abc - c + ac^2 + k - ack$; d) $27m^3 - 24m^2n + 8mn^2 - n^3$; e) $0{,}75a^2b + 2{,}5ab^2 - 12b^3 + 0{,}5a + 3b$; f) $0{,}6p^3 + p^3q^2 - p^4 - 0{,}6q - q^3 + pq$; **№6.** a) $a + 9$; b) $a - 9$; c) $-0{,}5a - 1$; d) $4 - a$; **№7.** a) 25; b) 78; **№8.** a) $12(n + 2)$; b) $24(n + 3)$; **№9.** a) 46; b) 0,1; c) 20,25; d) 2; **№10.** a) $3a^2$, $7b$, $35b^2$; b) $2x$, $-7y$, $10xy^2$, c) $4a$, 3, $6a^3$, b^3, $3b^3$; d) 15, $2y$, 3, $18y^4$, 5; **№11.** a) -1; b) -2,5; c) 2; d) 2.

стр. 103. №2. a) a^2; b) 5; c) z; d) y; e) $6z^2$; f) $(y + 1)$; **№3.** a) 4; b) -25, x; c) $(a - 1)$; d) 2, 5, x^3; e) 3, z; f) yoxdur; **№4.** a) $2a$; b) $5xy$; c) $(x - 1)$; d) -9c; e) $(x + 1)$; f) $(b - 5)$; **№5.** a) $15a^2b$; b) $7x^2y^4$; c) $2(x - 1)^2(x - 2)^2$; d) c^3; e) $x^2(x - 1)(x + 1)$; f) $(n - 3)(n + 6)^2$.

стр. 104. №1. a) $x(mx - n)$; b) $y(6y - 5)$; c) $3a^2b^2(b^2 + 3a)$; d) $4(1 + 3xyz)$; e) $abc(c^2 - ab^2)$; f) $xt(0{,}5x + t^2)$; **№2.** a) $(a - 2)(5x + 3y)$; b) $(x + 6)(9a - 7)$; c) $(m - 1)(m - 6)$; d) $4(k + 4)(2 + (k + 4)^2)$; **№3.** a) $(a - b)(10b - 3a)$; b) $(1 - x^2)(7x + 6)$; c) $(x + y)(n + m)$; d) $-2(x - y)$; **№4.** a) $abc(a^2b + ac - bc^2)$; b) $2xy(2xy^5 - y^3 + 3x^2y - 4y^4)$; c) $-7m(n^3 + 2m^3 - 3n^2)$; d) $x^2y^2(x^3 + x^2y - x^4y^2 + y^4)$; **№5.** a) $x^2y(a - 2x)(1 + y^2)$; b) $ab(m - n)(a^2 + b)$; c) $7x^3y^2(k - 2t)(x^3 + y^2)$; d) $bc^2(3x - 2a)(ac^2 + b^2)$.

стр. 105-108. №2. a) $(x - b)(a + y)$; b) $(a - 2b)(y + 2x^2)$; c) $(x + 3)(x + 2)$; d) $(\frac{1}{2}ax - b)(3x - y)$; **№3.** a) $(b + x)$; b) $(n - k)$; c) $(a - 2b)$; d) $(b + 1)$; **№4.** a) $(x + 1)(x^2 + 1)$; b) $(a - b)(a - 8)$; c) $(y^2 - 1)(y^3 - 1)$; d) $(a + b)(b - 5)$; e) $(a + 2)(a^3 - 1)$; f) $(x + y)(7 - x)$; g) $(b^4 - 2)(b^2 - 3)$; h) $(n + m)(k - n)$; **№5.** Ortaq vuruq olmadığı üçün; **№7.** a) $(a - 1)(a - 4)$; b) $(a + 2)(a - 8)$; c) $(x + y)(x + 8y)$; d) $(a + b)(a + 6b)$; e) $(y - x)(y - 8x)$; f) $(m - n)(m - 4n)$; **№8.** a) $a^2 + ab + ac + bc = (a + b)(a + c)$; b) $2a^2 + ab + 2ad + bd = (2a + b)(a + d)$; **№9.** a) $(a + 2)(b + c)$; b) $(x + y)(x + y)$; c) $(y + z)(8 + c)$; **№11.** a) $(a - x)(5a - 7)$; 91; b) $(m - n)(m - 3)$; -0,625; c) $(a + b)(a - 11)$; -30,8; d) $(a - b)(a - 2)$; -0,33; **№12.** a) 15600; b) 12500; c) 550; d) 28; **№13.** a) 10; b) -20; c) 1; **№14.** a) doğrudur; **№15.** a) -2; 8; b) -1; 12; c) -4; 1; d) -1; 5; e) -7; 4; f) -0,2; 2; **№16.** a) $10b^2$; $3a^2$; $2b$; b) $10xy^2$; $2x$; y; c) $3n^3$; $4m$; 3; $6m^3n^3$; d) 15; $2y$; 3; $18y^4$; 5.

стр. 109. №5. a) -7a; b) 1; c) $-m$; d) 5.

стр. 111. №4. a) $(a^2+1)(a-1)$; b) $(x - z)(x-5)$; c) $(b-2)(b-6)$; d) $(a-8)(b-5)$; **№5.** a) -5 и 8; b) -1 и -6; **№7.** a) $\frac{41}{55}$; b) 0; **№8.** a) $a^3 - 2ab - 2b - 4a^3$.

V. Треугольники

стр. 116. №4. a) 130°; b) 135°; c) 17° d) 20°; e) 30°.

стр. 117-118. №6. a) 72°; b) 61°; c) 120°; d) 23°; e) 27,6°; f) 67,2°; **№7.** a) 100°, 20°, 60°; b) 32°, 98°, 50°; c) 21°, 75°, 84°; **№8.** a) 68°; b) 19°; c) 20°; d) 81°; e) 69°; f) 48°; **№9.** 1) 30°, 65°, 85°; 2) 54°, 83°, 43°; 3) 27°, 54°, 99°; 4) 33°, 99°, 48°; 5) 40°, 40°, 100°.

стр. 119. №3. a) 93°; b) 128°; c) 16°; **№4.** a) 66°; 58°; b) 110°; 40°; 30°; c) 80°; 30°; 150°; **№5.** 120°; 36°; 24°; **№7.** a) 120°, 30°, 30°; b) 13°, 83,5°, 83,5°; или 13°; 13°; 154°; **№8.** a) 63°, 45°, 72° и 117°, 135°, 108°.

стр. 120-121. №3. a) $NK < MN < MK$; b) $\angle A < \angle C < \angle B$; **№4.** hipotenuz, 34°-li bucağın qarşısında duran katet ən kiçik tərəfdir; **№5.** İki hala baxılır, hər ikisi haqlıdır; **№6.** Bərabəryanlıdır;

стр. 122-123. №1. istənilən iki parçanın cəmi üçüncünun uzunluğundan böyük olmalıdır: nümunə: 3,5 см, 2,1 см и 43 мм; **№5.** a) xeyr; b) xeyr; c) bəli; **№6.** a) 1) 40 см; 2) 122 см; 3) 17,1 см; b) 1) 7 или 8; 2) 7; 3) 9; **№7.** Xeyr; **№8.** 6,92 см; **№9.** məktəb-dükan-ev; **№10.** a) 31 км; b) 19,9 км; **№ 11**. Olar; **№ 13**. Göstəriş: üçbucaq bərabərsizliyindən istifadə edin; **№ 14**. 37; **№15**. a) (1;9); b) (9;23); c) (0;10).

стр. 125. №1. a) $735'$, $282'$, $2040{,}7'$; b) $22920''$, $212400''$, $2340''$; c) $(3,(3))°$, $10{,}5°$; **№2.** a) 1) $73°24'$; 2) $66°12'$; 3) $125°6'$; 4) $41°55'48''$; 5) $12°30'$; b) 1) $12{,}6°$; 2) $\approx 44{,}277°$; 3) $54{,}008°$; 4) $\approx 135{,}933°$; 5) $\approx 49{,}014°$; **№3.** a) $33°55'$; b) $22°24'3''$; c) $129°53'34''$; d) $16°59'50''$; f) $44°15'15''$; g) $140°15'$; h) $85°59'$.

стр. 127-128. №1. 45,8°; 90,16°; **№2.** 48°; **стр. 129. №3.** 17,4 см; **№4.** 9,4 см;

стр. 130-131. №2. a) $\angle BAT = \angle DAT$; b) $BM = AM$; c) AD-yə; **№3.** a) 48°; b) 33,4 см; c) 90°; **№5.** Xeyr;

стр. 132. №1. a) doğrudur; b) doğru deyil; c) doğru deyil; d) doğrudur. **№2.** a) 48°, 60°, 72°; b) 1) 68°; 68°; 44° или 68°; 56°; 56°; 2) 136°; 22°; 22°; 3) 100°; 40°; 40°; **№3.** 60°; **№4.** 56°; **№5.** 25°, 70°, 85°; 25°, 60°, 95°; **№7.** 100 мм; **№8.** 49 дм; **№9.** 4,8 см; **№10.** 214,5 см.

VI. Формулы сокращённого умножения

стр. 134-136. №1. a) $x^2+8x+16$; b) $9-6a+a^2$; c) $1-4x+4x^2$; d) $a^2+10a+25$; e) $b^2-14b+49$; **№2.** a) $25y^2-30xy+9x^2$; b) $0{,}09a^2-2{,}4ax+16x^2$; c) $100c^2+2bc+0{,}01b^2$; d) $49p^2-14pk+k^2$; e) $144+192k+64k^2$; f) x^2-xy+y^2; g) $0{,}36+2{,}4x+4x^2$; h) $0{,}04m^2+2mnb+25b^2n^2$; k) $144a^2-7{,}2ac+0{,}09c^2$; **№3.** a) b; a; a; b) 10; c) $a;25;10a$; d) 140; **№5.** a) k^2+a^2+2ak; b) a^2+4a+4; c) $4a^2+4ab$; **№6.** a) 10201; b) 9801; c)3721; d) 39601; e)998001; f) 494209; g) 98,01; h) 104,04; k) 93025; m) 1002001; n) 358801; l) 99,6004; **№7.** a) $4xy$; b) $-4xy$; **№8.** a) x^4+20x^2+100; x^4-20x^2+100; b) $49+14y^3+y^6$; $49-14y^3+y^6$; c) $-4ab$; **№9.** a) $x^4-6x^2+9x^2$; b) $c^4-1{,}4c^5+0{,}49c^6$; c) $a^{10}+24a^7+64a^4$; d) $x^6+6x^4+36x^2$; e) $4y^6-2y^5+0{,}25y^4$; f) $x^2+x^3+\frac{4}{9}$; **№10.** a)16; b) 0; **№11.** a) $144m^2-24m-1$; b) $-49x^2+154x-109$; c) $14a$; d) $4a^2+36b^2$; e) $18ab-81$; f) $-162-18a^2$; **№12.** a) $2x^2+3x^2+9$; b) $-5b+14$; c) $4a^2$; d) $-21b-4$; **№13.** a) 72,84; b) 128; **№14.** a) 1,7; b) 2,2; c) $\frac{5}{12}$; d) 3,125; e) 1; f) $\frac{3}{13}$.

стр. 137-138. №1. a) $(x+4)(x+4)$; b) $(x-4)(x-4)$; c) $(2x-3)(2x-3)$; d) $(2x+3)(2x+3)$; **№2.** a) $(9a+b)(9a+b)$; b) $(10xy-1)^2$; c) $(7x+2y)^2$; d) $(7a-76)^2$; e) $(3c+4d)^2$; f) $(4-a^2b^2)^2$; **№3.** a) $16a^2$; b)x^2 ; c) $2bc$; d) $5ab$; e) $81a^2$; f) $16x^2$; **№4.** a) a; b) 2; c) $-2p$; d) 0; e) $-20bc$; f) $14xy$; **№5.** a) $(x^2-4y^2)^2$; b) $(0{,}5x+2y^2)^2$; c) $(\frac{1}{4}a^2+4b)^2$; d) $(mn-n^3)^2$; **№6.** a) $7y$; $25x^2$; $49y^2$; b) $10b$; $81a^2$; $180ab$; c) $-3n^2$; $9n^2$; $100a^2$; d) $5m$; $-8n$; $64n^2$; **№7.** a) 676; b) 2116; c) 400; d) 256; e)12544; f) -5184; **№8.** a) 5; b) 4; c) -1; d) 5; e) 2; f) 4; **№10.** a) $4a^2$; b) $(3b-a)^2$; c) 16; d) $0{,}81n^2$;

стр. 140-142. №3. a) x^4-49; b) a^8-b^6; c) $c^{10}-k^{14}$; d) $81x^2-b^4$; e) $0{,}49a^4-b^2$; f) $25c^{16}-9k^2$; **№4.** a) $6b$; $3a$; $36b^2$; b) $5m$; $5m$; $9x^2$; c) $1{,}2m^2$; $1{,}1a$; $1{,}2n^2$; $1{,}21a^2$; d) m^2; $18n^4$; **№5.** a) $\frac{25}{46}m^6-\frac{1}{16}n^4$; b) $\frac{100}{9}a^{10}-\frac{9}{4}n^{14}$; c) $\frac{16}{169}-\frac{1}{49}n^8$; d) $\frac{100}{289}-0{,}0004^{14}$; **№6.** a) 9999; b) 1591; c) 2496; d) 39999; e) 0,9975; f) 3,9991; g) 288,91 h) 999996; k) 899,96; m) 489999; n) 9991; l) 89975; **№7.** a) x^2-y^2; b) $-(x+y)^2$; c) $(b-a)^2$; d) $-(x-y)^2$; e) c^2-b^2; f) $(a+b)^2$; **№8.** a) $a^2-25x^2y^2$; b) $81-180p^4+100p^8$; c) $4a^4b^2-9$; d) $100y^2-0{,}04x^2$; e) $81x^2-289a^6$; f) $1{,}21y^2-0{,}09$; **№9.** a) $a=0$; b) $b=0$; **№10.** a) 0,04; b) 225; c) 1,44; **№ 11.** a) $(4a-2b)(4a+2b)$; b) $(8-9k)(8+9k)$; c) $(mn-5)(mn+5)$; d) $(x-\frac{4}{3})(x+\frac{4}{3})$; e) $(y-0{,}2)(y+0{,}2)$; f) $(0{,}8-0{,}7x)(0{,}8+0{,}7x)$; g) $(\frac{4}{5}n-25)(\frac{4}{5}n+25)$; h) $(1{,}3-\frac{7}{4}x)(1{,}3+\frac{7}{4}x)$; **№12**. a) $(6a-b)(6a+b)$; b) $(4m-3n)(4m+3n)$; c) $(k-ab)(k+ab)$; d) $(5n-x)(5n+x)$; e) $(8x-11y)(8x+11y)$; f) $(2ab-1)(2ab+1)$; g) $(9a-7)(9a+7)$; h) $(12b-7m)(12b+7m)$; k) $(p-ab)(p+ab)$; m) $(0{,}1n-3m)(0{,}1n+3m)$; n) $(0{,}3x-0{,}7y)(0{,}3x+0{,}7y)$; l) $(ax-1{,}1m^2)(ax+1{,}1m^2)$; **№13.** a) 1160; b) 251; c) 0,79588; d) -2280; e) 8,33; f) $13\frac{1}{3}$; **№14.** a) 0,75; b) 0,2; c) $\frac{4}{7}$; d) 4,375; **№15.** a) x^2-225; b) $-8a^2-1$; c) b^2+9; d) $75x^2+16$; e) x^2+1; f) $5x^2+0{,}25$; **№16.** a) a^4-b^4; b) $16x^4-y^4$; c) $m^{12}-b^4$; d) a^4-1; **№17.** a) -12; 8; b) ±4; c) ±0,5; d) $\pm\frac{1}{3}$; e) $\pm\frac{8}{3}$; f) $\pm\frac{3}{5}$; g) ∅; h) ∅; k) ±1,5; m) $\pm\frac{9}{7}$; **№18.** a) $2a^2-40a+12$; b) $1-8b$; c) $8x^2$; d) $242a^2-66ab$; **№ 19.** a) $(x-1)(x+7)$; b) $(4a-6)(4a+4)$; c) $(14-2x)(4+2x)$; d) $(10y+1)(-4y-1)$; e) $(4x-2)(10x+2)$; f) $a(a+22)$; g) $4ab$; h) $4mn$; k) $-40x$; m) $(2c-4x)(6c+2x)$; **№20.** a) $x^2-2xy+y^2-49$; b) $m^2-9n^2-12n-4$; c) $a^2+12a+36-16b^2$; d) $9x^2-1+2b-b^2$; **№21**. a) $(12-5)(12+5)$; b)$(20-9)(20+9)$; c) $(31-12)(31+12)$; d) $(30-7)(30+7)$; e) $(40-13)(40+13)$; f) $(50-9)(50+9)$.

стр. 144-145. №1. a) a^3+3a^2+3a+1; b) $a^3-6a^2+12a-8$; c) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$; d) $8a^3-36a^2+54a-27$; **№2.** a) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; b) $m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$; c) $x^3+6x^2+12x+8$; d) $\frac{8}{27}a^3+4a^2b+18ab^2+27b^3$; e) $m^3+0{,}6m^2+0{,}12m+0{,}008$; f) $125-75x+15x^2-x^3$; g) $8p^3-12p^2+6p-1$; h) $y^3+y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{27}$; **№3.** a) 42875; b) 1771,561; c) 140608; d) 79507; e) 8012,006001; **№4.** a) $X=ab; Y=a^3b^3$; b) $X=2a$; c) $X=2b$; d) $X=3a; Y=27a^3$; e) $X=ab^4; Y=a^3b^{12}$; **№5.** a) $x^6-3x^4y^4+3x^2y^8-y^{12}$; b) $-a^{15}-3a^{10}b^7-3a^5b^{14}-b^{21}$; c) $27x^6-189x^4y^2+441x^2y^4-343y^6$; d) $-64m^{12}-48m^8n^5-12m^4n^{10}-n^{15}$; e) $\frac{8}{27}a^3+1\frac{1}{3}a^2b^8+2ab^{16}+b^{14}$; f) $\frac{8}{27}a^{18}-16\frac{7}{8}a^{12}b^2+28\frac{1}{8}a^6b^4-15\frac{5}{8}b^6$; g) $a^3b^9-2\frac{1}{4}a^2b^6+1\frac{11}{16}ab^3-\frac{27}{64}$; h) $-\frac{1}{125}m^3-\frac{9}{50}m^2n-\frac{9}{20}mn^2-\frac{27}{8}n^3$; m) $0{,}125x^3y^6-1{,}5x^4y^5+0{,}06x^5y^4-0{,}008x^6y^3$; **№6.** a) $6a^2b+2b^3$; b) $-54m^2n-2n^3$; c) x^3+y^3; d) $-a^3-b^3$; e) a^3-b^3; f) $3mn^2-3m^2n$; **№7.** a) $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}$; b) $\frac{8}{343}x^3+3\frac{6}{7}x$;

c) $42x^3 + 42x^2y + 84xy^2 - 49y^3$; d) $\frac{7}{72}x^3 + 1\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{3}x + \frac{85}{108}$; **№8.** a) $27a^3b^6 + 27a^5b^6 + 9a^7b^6 + a^9b^6$; b) $m^{12}n^{15} - 9m^9n^{11} + 27\ m^6n^7 - 27\ m^3n^3$; c) $\frac{8}{125}x^3y^9 + \frac{6}{25}x^2y^{13} + \frac{3}{10}x^6y^{17} + \frac{1}{8}x^3y^{21}$; d) $343a^3b^3c^9 - 147a^4b^3c^7 + 189a^5b^3c^5 - 27a^6b^3c^3$; e) $0{,}001\ x^{18}y^6c^{30} - 0{,}006\ x^{12}y^4c^{20} + 0{,}012x^6y^2c^{10} - 0{,}008$; f) $a^3b^{15}c^{12} - 3{,}6a^3b^{11}c^9 + 4{,}32a^3b^7c^6 + 1{,}728a^3b^3c^3$.

стр. 147-148. **№1.** a) $a^2 + 4ab + 4b^2$; $a^2 + 2ab + 4b^2$; b) $36m^2 - 12mn + n^2$; $36m^2 - 6mn + n^2$; c) $4k^2$ $-12k + 9$; $4k^2$ $-6k + 9$; d) $0{,}25\ x^2 + 5xy^2 + 25y^4$; $0{,}25\ x^2 + 2{,}5xy^2 + 25y^4$; e) $49m^2 - 14\ mn^2 + n^4$; $49m^2 - 7mn^2 + n^4$; f) $\frac{4}{25}a^2 + \frac{4}{5}ab^4 + b^8$; $\frac{4}{25}a^2 + \frac{2}{5}ab^4 + b^8$; g) $2{,}56 - 16d + 25d^2$; $2{,}56 - 8d + 25d^2$; h) $1{,}69a^2b^2 + 2{,}6ab + 1$; $1{,}69a^2b^2 + 1{,}3ab + 1$; **№2.** a) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; b) $(x - y)(x^2 = xy + y^2)$; c) $(2 + a)(4 - 2a + a^2)$; d) $(5 + a)(25 - 5a + a^2)$; f) $(3 - x)(9 + 3x + x^2)$; g) $(c-1)(c^2 + c + 1)$; h) $(t + 1)(t^2 - t + 1)$; k) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$; **№3.** a) $(k - 10)(k^2 + 10k + 100)$; b) $(0{,}1 + a)(0{,}01 - 0{,}1a + a^2)$; c) $(\frac{1}{3}a + b^2)(\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}ab^2 + b^4)$; d) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}b)(\frac{9}{16} + \frac{3}{8}b + \frac{1}{4}b^2)$; f) $(1 - 5a^2)(1 + 5a^2 + 25a^4)$; g) $(7a^4 - b^3)(49a^8 + 7a^4b^3 + b^6)$; k) $(1{,}2 - 0{,}1x^2)(1{,}44 + 0{,}15x^2 + 0.01x^4)$; **№4.** a) $8p^3 - 27$; b) $b^3 - 1$; c) $27n^3 + m^6$; d) $64m^3 - 27n^3$; f) $27a^3 + d^{24}$; g) $27 - d^3$; **№5.** a) 43; b) -215; **№6.** a) $-a^3 - b^3$; b) $-a^3 - b^3$; c) $a^3 + b^3$; d) $-a^3 - b^3$; **№7.** a) $x^9 + y^{15}$; b) $27d^6 + 8c^3$; c) $125 + y^{18}$; d) $27r^{12} + 64s^{15}$; **№8.** a) $A = 3y$; b) $A = 5y$; $C = 5y$; $B = 20xy + 64x^3$; $D = 4x$; c) $A = 2d$; **№9.** a) 2; b) $-4\frac{2}{3}$; c) 4; d) 2; **№10.** a) $(2x + 1)(x^2 + x + 1)$; b) $a(a^2 - 3ab + 3b^2)$; c) $(10 + a - b)(100 - 10a + 10b + a^2 - 2ab + b^2)$; d) $(3x - y)(3x^2 + y^2)$; f) $(y + 1)(y^2 - 7y + 19)$; g) $(4m + n)(7m^2 - mn + n^2)$.

стр. 149-150. **№1.** a) 9936; b) 0,9964; c) 0,9919; d) 999975; **№2.** a) $2y^5 - 32y$; b) $1 - b^{12}$; c) $-9x^3 + x^5$; d) $a^{16} - 625$; **№3.** a) 0; b) $2y^2 - 74$; c) $6x - 9$; d) 48; **№4.** a) 44; b) $\frac{27}{64}$; **№5.** a) $x^22xy + y^2 - 1$; b) $a^2 - 2ab + b^2 - 9$; c) $m^2 + 2mn + n^2 - 4$; d) $c^2 + 8c + 16 - 9d^2$; **№6.** a) 4; b) 0; **№7.** a) $(3 - ab)(3 + ab)$; b) $(2mn^2 - 3)(2mn^2 + 3)$; c) $(0{,}3y^3 - 0{,}7x)(0{,}3y^3 + 0{,}7x)$; d) $(1{,}1p^2 - 1)(1{,}1p^2 + 1)$; f) $(0{,}1ab^3 - 0{,}4)(0{,}1ab^3 + 0{,}4)$; g) $(1\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}y)(1\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}y)$; **№8.** a) $\frac{15}{64}$; b) 100; c) 0,5; d) 25; **№9.** a) $x(x - 6)$; b) $(-3x - 3)(1 - 3x)$; c) $(5 - a)(a + 13)$; d) $(3b + 1)(3b + 5)$; **№10.** a) 17,4; b) 17; **№ 11.** a) $4a$; b) $7x(3x + 2)$; **№ 12.** a) $a^3 + 22a - 28$; b) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 2$; **№13.** a) $(0{,}3a + 1)(0{,}09a^2 - 0{,}3a + 1)$; b) $(m - 0{,}2n)(m^2 + 0{,}2mn + 0{,}04n^2)$; c) $(x^2 - 0{,}4y^3)(x^4 + 0{,}4x^2y^3 + 0{,}16y^6)$; d) $(\frac{1}{4} - b^4)(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}b + b^8)$; e) $(\frac{2}{3} - a^5)(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}a^5 + a^{10})$; f) $(1\frac{1}{2}x^4 + b^5)(2\frac{1}{4}x^8 - 1\frac{1}{2}x^4b^5 + b^{10})$; **№14.** a) $58(41^2 - 41{\cdot}17 + 17^2)$; b) $48(53^2 + 53{\cdot}5 + 25)$; c) $400(33^2 - 33{\cdot}17 + 17^2)$; **№15.** a) 20; b) $2\frac{10}{11}$; **№16.** a) $(a + 3)(a^2 + 18a + 93)$; b) $(9b + 2)(81b^2 + 107b + 4a)$; c) $18c^6(c - 1)(7c^2 + 6c + 12)$; d) $x^3(xy^3 - 4)(x^2y^6 + 4xy^3 + 16)$; e) $4x(4x^2 + 3y^2)$; f) $10y(48x^2 + 25y^2)$; **№ 18.** Kvadratın sahəsi daha böyükdür; **№20.** a) $2(x^4 - 3)^2$; b) $2(x^3 + 2y)^2$; c) $x(4 + 4y^6 - y^{12})$; d) $-y(x^2 + 3y^2)^2$; **№21.** a) $(3a + b)(a - b)(a + b)$; b) $(x - 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; **№22.** a) ±1; 2; b) 6; c) ±1; 0,75; d) ±3; 0,5.

стр. 151. **№1.** a) $5b(a^2 - 5)$; b) $7a(b - c)(b + c)$; c) $2c(a^2 - 4b^2)(a^2 + 4b^2)$; d) $cd(2c - 3d)(2c + 3d)$; e) $-n(64m^2 + 27)$; f) $9m(n^6 - 13)$; g) $6x^2(y - 2z)(y + 2z)$; h) $2y(x - 4)(x + 4)$; k) $7q(p^3 - q^3)(p^3 + q^3)$; **№2.** $3y(x + y)^2$; b) $(a - b + c)(a - b - c)$; c) $(a - b)(a + b - 1)$; d) $5(a - b)^2$; e) $(x + y - a)(x + y + a)$; f) $(c + d)(1 + c - d)$; g) $7x(y + 2)^2$; h) $(3 - m + 2n)(3 + m - 2n)$; **№3.** a) 0; 4; b) 0; ±3; c) 0; ±1; d) 0; ±5; e) 0;1; f) -3; ±2; **№4.** a) $1 + 64b^3$; b) $125\ k^3 - 343p^3$; **№5.** 333; **№6.** a) 28 см; b) 52 см; **№7.** b) 1) $68(c^2 - d^2)$; 2) $8\frac{21}{25}(a^2 + b^2)$.

VII. Функция

стр. 153-155. **№1.** a) funksiyadır; b) funksiyadır; c) funksiyadır; **№2.** a) -1; 0; 2; b) 2; 2,5; 3,25; **№4.** a) $f(t) = 50\ t$; b) $y = -4x + 1$; c) $y = \frac{1}{2}x$; **№5.** a) 4,5 q; b) 18 q; c) 153 q; **№6.** a) 1266 AZN; b) 1145 AZN; c) 1200 AZN; d) 1342 AZN; **№7.** a) funksiyadır; b) funksiya deyil; **№8.** 22; -14; -21; **№9.** a) 674 мм.civ.süt; 525,7 мм.civ.süt; 404,8 мм.civ.süt; 198,1 мм.civ.süt; b) 0 км; 1 км; 20 км; **№10.** a) fevral; mart; may; b) yaz-yay; payız-qış; c) 500 dəq; 650 dəq; 850 dəq; 880 dəq; 700 dəq; **№11.** a) $y(0) = 1$; $y(2) = 4$; $y(3) = 1{,}5$; $y(5) = 1$; b) -1; 0; 0,5; c) nümunə; 3; 4; 5; d) -2; -1,5; e) -1; 6; m) (0; 1); (-1; 0); **№12.** a) 3; -12; 2; b) -0,5; 1,1; -1,1; **№13.** d) 0,5.

стр. 158-159. **№1.** a) $y = x - 3$; b) $y = -7x$; d) $y = 10$; e) $y = \frac{x}{5} - 1$; **№2.** a) düz xətt, $x = 5$; b) düz xətt; **№3.** a) M, N, A, B nöqtələri; b) olar; **№4.** a) $p = 4a + v$; b) $S = a^2$; **№5.** a) (0; 1); (-0,5; 0); b) (0; 0); c) (0; -1); (5; 0); d) (0; 7); $(4\frac{2}{3}; 0)$; **№6.** a) $y = x + 1$; b) $y = -2$; c) $y = -x + 1$; d) $y = -2x$; e) $y = x$; **№7.** $y = 0$ absis oxu; $x = 0$ ordinat oxu; **№8.** a) (0;0); b) koordinat başlanğıcı və hər hansı bir nöqtənin koordinatı; **№9.** a) doğru; b) doğru deyil; c) doğru; d) doğru; **№10.** a) $y = 9$; b) $x = -8$; **№11.** a) -1; b) 0; **№12.** a) -33; b) 2; **№13.** a) $k<0$; $b>0$; b) $k<0$; $b<0$; c) $k>0$; $b>0$.

стр. 161. **№1.** a) paralel; b) kəsişir; c) kəsişir; d) kəsişir; **№2.** a) olar; b) olar; c) olar; d) olmaz; **№3.** a) $y = 1{,}75x$; b) $y = -3x$; c) $y = 2{,}4x$; d) $y = 0{,}75x$; e) $y = 4x$; f) $y = 2{,}8x$; g) $y = -0{,}2x$; h) $y = -6x$; m) $y = -0{,}75x$; **№5.** a) kəsişir; $k_1 = -3$; $k_2 = 0{,}5$; b) paraleldir; $k_1 = k_2 = 1$; c) kəsişir; $k_1 = -1$; $k_2 = 1$; d)) paraleldir; $k_1 = k_2 = -1$.

стр. 163-164. **№1.** a) bəli; b) xeyr; c) bəli; d) bəli; e) bəli; f) bəli; g) xeyr; h) bəli; **№2.** a) (-4; 3); (0; -5); (4; -3); b) (0; -5); (4; -3); **№3.** (0,1; 11); (1; 2); **№5.** a) $y = \frac{7-4x}{2}$; b) $y = 5x - 12$; c) $y = \frac{-x-30}{15}$; d) $7 + \frac{14x}{3}$; e) $y = \frac{4x}{5} - 4$; f) $y = -x$; **№6.** a) $x = \frac{7-2y}{4}$; b) $x = \frac{y+12}{5}$; c) $x = -15y - 30$; d) $x = \frac{3y-21}{14}$; e) $x = \frac{5y}{4} + 5$; f) $x = -y$; **№7.** $\left(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}\right)$; **№8.** $a = 3$; $y = -3{,}5$; **№9.** Nümunə: 20 ikiyerlik, 70 üçyerlik; **№11.** a) и c) eynigüclüdür; b) и d) eynigüclüdür; **№12.** a) $6x - 7y = 11$; b) $3x - 5y = -2$; c) $12x + y = 9$; d) $12x - 3y = -11$.

стр. 165. №1. a) xeyr; b) xeyr; c) bəli; d) xeyr; e) bəli; **№2.** Bəli; kəsişər; a) bəli; b) var: (0; 1,5); **№4.** a) 2; b) 4; **№5.** $x + 2y = 12$; (10;1); (2;5); (4; 4); (6; 3); (8; 2).

стр. 166. №1. a) (0; $2\frac{1}{3}$); (3,5; 0); **№3.** (x; $\frac{7}{18}$); **№4.** 10 qəp.; **№5.** Bir-birinə paraleldir; **№6.** Kvadratdır; **№7.** (1; 2); **№8.** a) $3x + 2y = 400$; b) (90; 65); **№9.** Göstəriş: Kök tam ədəd olduğuna görə, $y = \frac{-4x+16}{7}$ ifadəsində $y = 4n$ qəbul edilir $(n \in \mathrm{N})$. Onda $x = 4 - 7n$ olar; $(4 - 7n; 4n)$.

VIII. Система линейных уравнений

стр. 169-170. №2. a) əmsal: 2; 5; 7; 1; sərbəst hədd: -1; 2; b) əmsal: 0,5; 3,1; 1; 1,2; sərbəst hədd: 4; 1; c) əmsal: -3; 3; -6; 1; sərbəst hədd: -2; 5; **№3.** Xeyr; **№4.** a) xeyr; b) bəli; **№5.** a) kəsişir; b) kəsişir; c) paraleldir; d) - m) kəsişir; **№8.** a) 1,5; b) $6\frac{7}{6}$; c) -15; d) -24; e) -0,4; f) -28; **№9.** a) -6; b) 24; c) 0,625; d) -5,4; e)-1; f) 0,1; **№10.** a) $m \neq -48$; b) $m \neq -10$; c) $m \neq -4{,}5$; d) $m \neq -6$; e) $m \neq 0{,}4$; f) $m \neq -\frac{7}{32}$.

стр. 172-173. №1. a) $y = 5x - 12$; b) $y = 0{,}75x - 1{,}75$; c) $y = -2x - 18$; d) $y = \frac{10}{13}x + \frac{160}{117}$; **№2.** a) (1;2); b) (-2;1); **№3.** Tənliklər sistemində x və y-in qiymətlərini yerinə qoyub hesablamaqla və ya qrafik qurmaqla; **№4.** b) (2;1); **№6.** a)(3;2); b) (1;-1); c) (3;1); **№7.** $3x - y = 1{,}2$; **№8.** $5x - 2y = 10$; **№9.** Nümunə: a) $x + 4y = 5$; b) $x + 2y = -6$; c) $-3x - 6y = 1$; **№11.** a) bir; b) bir; c) bir; d) sonsuz; e) bir; f) bir.

стр. 175-176. №1. 1) a) $x = 0{,}2y + 2{,}4$; b) $x = -7y - 9$; c) $x = 1{,}875y + 1{,}25$; 2) a) $y = 0{,}5x - 12$; b) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{9}{7}$; c) $y = 0{,}6x + 0{,}6$; **№2.** a) $\begin{cases} a+3b=6 \\ 2a+b=7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3a+2=2b+4 \\ b+3=a+3 \end{cases}$; **№3.** a) (5,5;3,5); b) (-2,8; 6,2); c) (4; 3); d) (2;1); e) (-85; -34); f) $\left(1\frac{2}{21}; \frac{52}{63}\right)$; g) (1; 6); h) $\left(-1\frac{5}{14}; -3\frac{3}{14}\right)$; m) (7; -4,5); **№4.** a) (4,4; 1,72); b) $\left(\frac{19}{36}; -\frac{5}{6}\right)$; c) (-3; 1); d) (7; 1); **№5.** a) $\left(\frac{19}{17}; -\frac{7}{17}\right)$; b) (2; 4); c) (1;1); **№6.** a) (-9; 2); b) (12; -2); c) (-15; 12); d) (4; 3); e) (5; -1); f) (2; -1,5); **№7.** a) (0;0); b) (18; 6); c) (53,4; 31,2); **№8.** a) -0,25; ($2\frac{2}{3}$; 0) ; b) 3; (3; 0).

стр. 178-179. №1. a) $9x - 12y = 24$; b) $4x + 0{,}2y = -3$; c) $11x + 19y = -34$; d) $75y + 7x = -105$; **№2.** a) (5; -1); **№3.** a) (5; 1); b) (1; -0,5); c) (3;4); d) (-1; 6); e) (-2; -2); f) (3;1); g) (-2;1); h) (-3; -4); m) (0,5; -2); n) (2; 6); k) (9; 7); l) ($-3\frac{3}{7}$; $2\frac{6}{7}$); **№4.** a) $y = x$; b) $y = -1{,}5x + 11$; c) $y = 6x - 23$; d) $y = -2x - 7$; **№5.** $y = 3x + 6$; **№6.** $y = \frac{1}{3}x - 2$; **№7.** a) $y = 1{,}5x + 3$; b) $y = -x - 2$; c) $y = -2x - 2$ и $y = -x + 2$; **№8.** a); b) (4; 4); c) (5; 1); d) ; e) (15; 12); f) (7; -5); **№9.** a) (3; 1); b) (7; 5); c) ($-\frac{2}{19}$; $3\frac{3}{19}$); d) (0; -7); **№10.** a) 61° и 29°; b) 136,25° и 43,75°; c) 36° и 54°.

стр. 180-184. №2. a) 47 и 18; bəli; b) 135,5 и 42,5; **№3.** a) 1734; b) 3 misli; $\frac{1}{3}$ hissəsi; c) 48 и 20; **№4.** a) 2,7 м и 1,6 м; b) 18 и 6; c) 18 и 10; **№5.** 40 ман.; 170 ман.; **№6.** 9 кг и 8 кг; **№7.** 78 л и 62 л; **№9.** 29,25 г и 35,75 г; **№10.** 10 ман. и 6 ман.; **№ 11.** 14 л и 19 л; **№12**. a) 10 дм; b) 96 см^2; **№13**. a) 130; b) 135; c) 67,4; **№14**. a) 86; b) 63; **№ 15**. a) $3\frac{3}{7}$ км/saat и $6\frac{4}{7}$ км/saat; b) 60 км/saat; 12 км/saat; **№16**. 18 км/saat; **№17**. 30 şagird; **№ 18**. a) 51,5° и 128,5°; b) 127,5° и 52,5°; **№19**. a) -1 и 1; b) -20; 29; -39; **№20**. 4 gün; **№21**. 30 кг и 10 кг; **№22**. a) $5\frac{3}{11}$ кг и $31\frac{7}{11}$ кг; b) 18 и 22.

стр. 185. №1. 29; **№3.** (2; 1); **№4.** a) $a = -2$; $b = -6$; b) $a \neq -2$; c) $a = -2$; $b \neq -6$; **№5.** a) (0;0); b)(6;6); c) (1; 0); d) (20; 20); **№6.** 34; 68; 58; **№7.** 5 kisə и 7 kisə.

IX. Конгруэнтность треугольников

стр. 199. №1. MN≅MK, ∠N ≅∠K; **№2.** NC≅KC, ∠N ≅∠K; ∠NMC ≅∠KMC; ∠NCM ≅∠KCM; **№3.** a) 1) 6 см; 2) 12,5 мм; 3) 7,2 см; b) 1) 6,8 см; 2) 10 мм; 3) 8,9 см; **№4.** Doğrudur; **№5.** Bərabəryanlı üçbucaq olduğunu göstərin; **№6.** a) 75°; b) 30°; c) 45° d) 60°**; №7.** a) 1) bəli; 2) xeyr; 3) xeyr; b) 1) 60°; 2) 124°; 3) 22°; **№8.** Doğrudur; **№9.** 11,4 см; **№10.** a) 55°, 55°, 70°; b) 44°, 44°, 92°; c) 32°, 74°, 74°; **№11.** 34.4 см; **№12**. 15 см; **№ 13.** 22 см, 22 см, 31 см или 28 см, 28 см, 5 см.

X. Ситуационные задачи

стр. 204. №3. a) 0,5; b) 1; **№4.** 12,5 м и 12,6 м; **№5.** 478601 см^2; 481401 см^2; №6. 11550 см^3; 18850 см^3; **№7.** 18,5°C и 18,7°C. **стр. 206-207. №1.** a) 0,007%; b) 0,02%; **№2.** b) ≈0,139 ; ≈0,135; **№5.** 0,049; **№6.** a) $a = 0{,}35 \pm 0{,}005$; b) 1,4%. **№7.** 0,8%; 5±0,03; 0,25%; 1,4%; **№8.** a) 3%; b) 0,2%; **№9.** 0,00013%; 0,012%

стр. 209-210. №1. Doğrudur; **№2.** 115000 AZN; 124000 AZN; 130000 AZN; **№4.** a) 12,5%; b) 8680 AZN; **№5.** a) 3420 AZN; b) 7535,5 AZN; c) 3600 AZN; **№8.** a) 4 ay; b) 6 ay; c) 12 ay; d) 18 ay; **№9.** 864 AZN; **№10.** 51200 AZN.

стр. 212. №3. 51200000; **№4.** a) 5312,5 AZN; b) 5781,25 AZN.

стр. 215. №2. a) 10! ; b) 11; **№ 5.** 7 qara, 9 ağ daş; **№ 6.** 60 qəp.; **№ 8.** (200p + 100q + pq) ман.; **№10.** a) 22; b) 85714; **№ 13.** 5000 man; **№ 15.** 700 м.

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 7

Ümumi təhsil müəssisələrinin 7-ci sinifləri üçün
Riyaziyyat fənni üzrə

DƏRSLİK
(rus dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Sevda İsmayılova**
Sahib Abdurahimov

Elmi redaktor və tərcüməçi: **Sahib Abdurahimov**

Buraxılışa məsul **Rafiq Kazımov**
Üz qabığının dizayneri **Yusif Qabilov**
Dizayner və səhifələyici **Yeganə Rüstəmova**
Multimedia mütəxəssisləri: **Yusif Qabilov**
Kənan Yusifzadə
Korrektor **Nərgiz Əhədova**
Texniki redaktor **Sevinc Yusifova**
Baş redaktor **Samirə Bektaşi**
Texniki direktor **Allahverdi Kərimov**
Nəşriyyat direktoru **Sevil İsmayılova**

Rəqəmsal mobil texnologiyaların (animasiyalar, multimedia və QR kodlar) dərslik və metodik vəsaitlərdə istifadəsinin ideya müəllifi **Rafiq Kazımov**

Hesab-nəşriyyat həcmi 20. Fiziki çap vərəqi 28. Formatı 57x82 1/8.
Kəsimdən sonra ölçüsü: 195x275. Səhifə sayı 224.
Şriftin adı və ölçüsü: məktəb qarnituru 10-12. Ofset kağızı. Ofset çapı.
Sifariş . Tiraj 15330. Pulsuz. Bakı – 2022

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix: 14.09.2022

Çap məhsulunu nəşr edən:
"Şərq-Qərb" ASC
(Bakı, AZ1143, Hüseyn Cavid pr., 111)

Çap məhsulunu istehsal edən:
"Təhsil Nəşriyyat-Poliqrafiya" MMC
(Bakı, AZ1052, F.Xoyski küç., 121A (149))

Pulsuz

Əziz məktəbli!

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir.

O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!